



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

Computer Science Theory (Master Course)

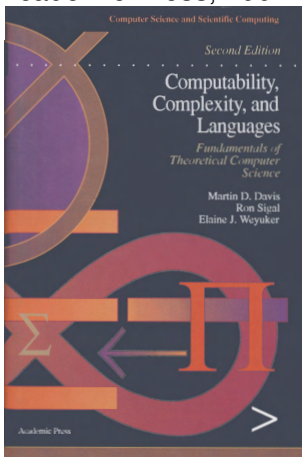
Mohammad Farshi
Department of Computer Science
Yazd University

1395-1



Textbook:

Martin D. Davis, Ron Sigal, Elaine J. Weyuker,
**Computability, complexity, and languages:
fundamentals of theoretical computer science**,
Second Edition. Academic Press, 1994.



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction





Other books:

- John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, and Jeffrey D. Ullman, **Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation**, Third Edition Pearson/Addison-Wesley, 2007.
- Michael Sipser, **Introduction to the Theory of Computation**, Third Edition Cengage Learning, 2013
- Alfred V. Aho and Jeffrey D. Ullman, **Foundations of Computer Science**, C Edition W. H. Freeman, 1995.
online available at
<http://infolab.stanford.edu/%7Eullman/focs.html>

Grading:



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

Grading:

- Midterm exam: 7
- Final exam: 8
- Homework: 5
- **Important:** For passing the course, one should get at least 9 from midterm+final exams.

Course Webpage:

<http://cs.yazd.ac.ir/farshi/Teaching/TheoComp3951/TheoComp.html>



Prerequisites:



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

What you need to know:

- **Basic Algorithms and Algorithm Analysis:** $\mathcal{O}$, Θ notations, sorting, searching.
- **Basic Mathematical logic and reasoning:** Functions, Proof by induction, Proof by contradiction,



Course Objectives:

- Learning computational thinking
- Understanding the fundamental models of computation that underlie modern computer hardware, software, and programming languages.
- Discovering that there are problems no computer can solve.
- Discovering that there are limits on how fast a computer can solve a problem.
- Mastering the foundations of automata theory, computability theory, and complexity theory.
- Learning about applications of computer science theory to algorithms, programming languages, compilers, natural language translation, operating systems, and software verification.



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction





دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

Introduction





دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

Theoretical computer science:

The **mathematical study** of models of computation.





دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

Mathematics we need:

- Sets and n -tuples (union, intersection, product, ...)
- Functions (domain, range, partial, total, onto, 1-1, ...)
- Alphabets, strings (words), language, ...
- Predicates: a total Boolean-valued function.
- Mathematical logic: $\exists, \forall, \sim$.
- Types of Proof: Construction, Induction, Contradiction, ...



Proof by contradiction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

Theorem: $\sqrt{2}$ is **not** rational.

Proof (by contradiction:) Assume $\sqrt{2}$ is rational. Let $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, where $m, n \in \mathbb{N}$ and $\text{GCD}(m, n) = 1$. Therefore:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

$$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

$$m^2 = 2n^2$$

m^2 is even and so m is even.

$$(2k)^2 = 2n^2$$

$$2k^2 = n^2$$

n^2 is even and so n is even.

Contradict with $\text{GCD}(m, n) = 1$.

Proof by contradiction: Example

Theorem: If $x \in \{a, b\}^*$ and $ax = xa$ then $x = a^{[n]}$.

Proof (by contradiction:) Assume that b appears in x . Let $x = a^{[k]}bu$ (consider the first place that b appears in x ,
Since $xa = ax$:

$$a^{[k]}bua = aa^{[k]}bu = a^{[k+1]}bu$$

$$bau = abu.$$

Contradiction, because a word can not start with both a and b at the same time.



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction



Proof by Induction:



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

استقرای ریاضی:



استقرای ریاضی:

روشی است برای اثبات منطقی گزاره‌ها. از لحاظ کارکرد مشابه دامینوها عمل می‌کند.



استقرای ریاضی:

روشی است برای اثبات منطقی گزاره‌ها. از لحاظ کارکرد مشابه دامینوها عمل می‌کند.

گزاره: با شرط $x \geq -1$
به ازای n نامساوی $(1+x)^n \geq 1+nx$ درست است. $P(n)$



استقرای ریاضی:

روشی است برای اثبات منطقی گزاره‌ها. از لحاظ کارکرد مشابه دامینوها عمل می‌کند.

گزاره: با شرط $x \geq -1$
به ازای n نامساوی $1 + nx \leq (1 + x)^n$ درست است. $P(n)$

هدف: می‌خواهیم ثابت کنیم گزاره $P(n)$ به ازای هر n درست است.



اصل استقرای ریاضی ضعیف

اگر $m \in \mathbb{N}$ و $P(n)$ یک گزاره باشد به طوری که:
۱. $P(m)$ درست باشد،

۲. به ازای هر $k \geq m$ گزاره $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ درست باشد،
آنگاه به ازای هر $n \geq m$ $P(n)$ درست است.



اصل استقرای ریاضی ضعیف

اگر $m \in \mathbb{N}$ و $P(n)$ یک گزاره باشد به طوری که:
۱. $P(m)$ درست باشد،

۲. به ازای هر $k \geq m$ گزاره $P(k-1) \Rightarrow P(k)$ درست باشد،
آنگاه به ازای هر $n \geq m$ $P(n)$ درست است.

مثال: ثابت کنید به ازای هر n

$$P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx.$$

پایه استقرا: $P(1) : (1+x) \geq 1+x$

فرض استقرا: $P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx$

حکم استقرا: $P(n+1) : (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$



اصل استقرای ریاضی ضعیف

- اگر $m \in \mathbb{N}$ و $P(n)$ یک گزاره باشد به طوری که:
۱. $P(m)$ درست باشد،
 ۲. به ازای هر $k \geq m$ گزاره $P(k-1) \Rightarrow P(k)$ درست باشد،
- آنگاه به ازای هر $n \geq m$ $P(n)$ درست است.

مثال: ثابت کنید به ازای هر n

$$P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx.$$

پایه استقرا: $P(1) : (1+x) \geq 1+x$

فرض استقرا: $P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx$

حکم استقرا: $P(n+1) : (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$$

$$\geq 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$



اصل استقرای ریاضی قوی

اگر $m \in \mathbb{N}$ و $P(n)$ یک گزاره باشد به طوری که:
۱. $P(m)$ درست باشد،

۲. به ازای هر $k \geq m$ گزاره $P(k) \Rightarrow (P(m) \wedge \dots \wedge P(k-1))$ درست باشد،

آنگاه به ازای هر $n \geq m$ ، $P(n)$ درست است.

Proof by Induction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

مثال:

دنباله فیبوناچی با تعریف $F_1 = 1, F_2 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید به ازای هر n ,

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Proof by Induction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

مثال:

دنباله فیبوناچی با تعریف $F_1 = 1, F_2 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید به ازای هر n ,

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

اثبات:

پایه استقرا: گزاره به ازای $n = 1$ بوضوح درست است.

$$\text{فرض استقرا: } F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{حکم استقرا: } F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Proof by Induction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

مثال:

دنباله فیبوناچی با تعریف $F_1 = 1, F_2 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید به ازای هر n ,

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

اثبات: (استقرای قوی)

پایه استقرا: گزاره به ازای $n = 1$ بوضوح درست است.

$$F_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}, \quad k \leq n$$

فرض استقرا: به ازای هر $k \leq n$

$$F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

حکم استقرا:

Proof by Induction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

مثال:

دنباله فیبوناچی با تعریف $F_1 = 1, F_2 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید به ازای هر n ,

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

اثبات: (استقرای قوی)

پایه استقرای: گزاره به ازای $n = 1$ بوضوح درست است.

$$F_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}, \quad k \leq n \text{ فرض استقرای: به ازای هر } k \leq n$$

$$F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} \text{ حکم استقرای:}$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

Proof by Induction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

مثال:

دنباله فیبوناچی با تعریف $F_1 = 1, F_2 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید به ازای هر n ,

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

اثبات: (استقرای قوی)

پایه استقرا: گزاره به ازای $n = 1$ بوضوح درست است.

$$F_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}, \quad k \leq n \text{ به ازای هر } k.$$

$$F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} \text{ حکم استقرا:}$$

$$\begin{aligned} F_{n+1} = F_n + F_{n-1} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Proof by Induction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

مثال ۱:

فرض کنید n تیم در یک تورنمنت شرکت می کنند. اگر هیچ دو تیمی مساوی نشوند، ثابت کنید دنباله ای از تیم ها مثل $\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ وجود دارد به طوری که تیم t_1 از تیم t_2 و تیم t_2 از تیم t_3 و ... برده باشد.

Proof by Induction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

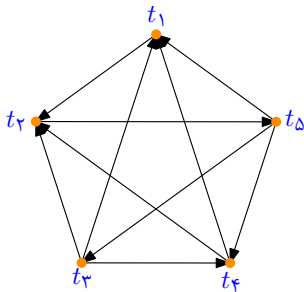
Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

مثال ۱:

فرض کنید n تیم در یک تورنمنت شرکت می کنند. اگر هیچ دو تیمی مساوی نشوند، ثابت کنید دنباله ای از تیم ها مثل $\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ وجود دارد به طوری که تیم t_1 از تیم t_2 و تیم t_2 از تیم t_3 و ... برده باشد.



Proof by Induction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

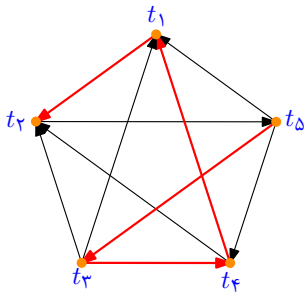
Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

مثال ۱:

فرض کنید n تیم در یک تورنمنت شرکت می کنند. اگر هیچ دو تیمی مساوی نشوند، ثابت کنید دنباله ای از تیم ها مثل $\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ وجود دارد به طوری که تیم t_1 از تیم t_2 و تیم t_2 از تیم t_3 و ... برده باشد.



$\langle t_5, t_3, t_4, t_1, t_2 \rangle$

Proof by Induction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

اثبات:

پایه استقرا: در یک تورنمنت با $n = 1$ تیم حکم بوضوح درست است.
فرض استقرا: برای هر تورنمنت با n تیم دنباله وجود دارد.
حکم استقرا: برای هر تورنمنت با $n + 1$ تیم دنباله وجود دارد.

Proof by Induction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

اثبات:

پایه استقرا: در یک تورنمنت با $n = 1$ تیم حکم بوضوح درست است.
فرض استقرا: برای هر تورنمنت با n تیم دنباله وجود دارد.
حکم استقرا: برای هر تورنمنت با $n + 1$ تیم دنباله وجود دارد.

یک تورنمنت دلخواه با $n + 1$ تیم در نظر بگیرید.

$$\{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}\}$$

با حذف t_{n+1} از تورنمنت یک تورنمنت n تیمی حاصل می‌شود که طبق فرض استقرا دارای دنباله است.
فرض کنید $\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ دنباله مورد نظر باشد.



Proof by Induction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

اثبات:

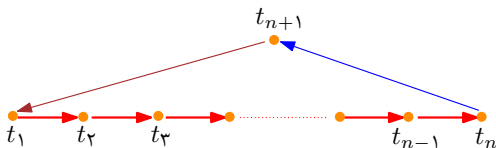
پایه استقرا: در یک تورنمنت با $n = 1$ تیم حکم بوضوح درست است.
فرض استقرا: برای هر تورنمنت با n تیم دنباله وجود دارد.
حکم استقرا: برای هر تورنمنت با $n + 1$ تیم دنباله وجود دارد.

یک تورنمنت دلخواه با $n + 1$ تیم در نظر بگیرید.

$$\{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}\}$$

با حذف t_{n+1} از تورنمنت یک تورنمنت n تیمی حاصل می‌شود که طبق فرض استقرا دارای دنباله است.
فرض کنید $\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ دنباله مورد نظر باشد.

حالت ۱:



Proof by Induction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

اثبات:

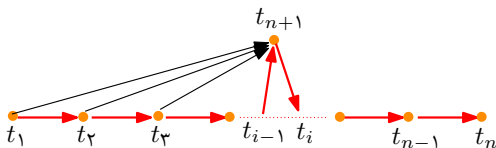
پایه استقرا: در یک تورنمنت با $n = 1$ تیم حکم بوضوح درست است.
فرض استقرا: برای هر تورنمنت با n تیم دنباله وجود دارد.
حکم استقرا: برای هر تورنمنت با $n + 1$ تیم دنباله وجود دارد.

یک تورنمنت دلخواه با $n + 1$ تیم در نظر بگیرید.

$$\{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}\}$$

با حذف t_{n+1} از تورنمنت یک تورنمنت n تیمی حاصل می‌شود که طبق فرض استقرا دارای دنباله است.
فرض کنید $\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ دنباله مورد نظر باشد.

حالت ۲:



Proof by Induction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

مثال:

فرض کنید n خط دو به دو متقاطع در صفحه داده شده‌اند به طوری که هیچ سه خطی هم‌رس نیستند. این خطوط صفحه را دقیقاً به چند ناحیه تقسیم می‌کند؟

Proof by Induction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

مثال:

فرض کنید n خط دو به دو متقاطع در صفحه داده شده‌اند به طوری که هیچ سه خطی هم‌رس نیستند. این خطوط صفحه را دقیقاً به چند ناحیه تقسیم می‌کند؟

تعداد ناحیه‌ها با رسم n خط: $S(n)$

Proof by Induction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

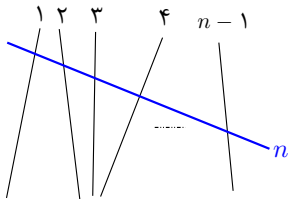
Proof by Induction

مثال:

فرض کنید n خط دو به دو متقاطع در صفحه داده شده‌اند به طوری که هیچ سه خطی هم‌رس نیستند. این خطوط صفحه را دقیقاً به چند ناحیه تقسیم می‌کند؟

تعداد ناحیه‌ها با رسم n خط: $S(n)$

سوال: با رسم خط n ام چند ناحیه به $S(n-1)$ اضافه می‌شود؟



Proof by Induction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

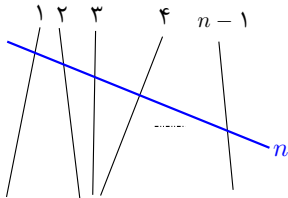
Proof by Induction

مثال:

فرض کنید n خط دو به دو متقاطع در صفحه داده شده‌اند به طوری که هیچ سه خطی هم‌رس نیستند. این خطوط صفحه را دقیقاً به چند ناحیه تقسیم می‌کند؟

تعداد ناحیه‌ها با رسم n خط: $S(n)$

سوال: با رسم خط n ام چند ناحیه به $S(n-1)$ اضافه می‌شود؟



$$S(n) = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ S(n-1) + n & n \geq 2 \end{cases}$$

Proof by Induction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

$$S(n) = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ S(n-1) + n & n \geq 2 \end{cases}$$

Proof by Induction: Example



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction

$$S(n) = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ S(n-1) + n & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n-1) + n \\ &= S(n-2) + (n-1) + n \\ &= S(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\ &\vdots \\ &= S(1) + 2 + 3 + \cdots + n \\ &= 2 + 2 + 3 + \cdots + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1. \end{aligned}$$



دانشگاه یزد

Yazd Univ.

Computer Science
Theory

M. Farshi

Course Outline

Textbook

Grading

Prerequisites

Introduction

Proof by contradiction

Proof by Induction



End of Chapter 1.

