

مبانی نظریه محاسبه

محمد فرشی

گروه علوم کامپیوتر - دانشگاه یزد

نیمسال اول ۱۳۹۶-۱۳۹۵



دانشگاه یزد

کتاب درسی:

نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها، نوشته پتر لینز، ترجمه بابک سلیمی و مجتبی پورمحقق



دانشگاه شاهرود

سایر کتاب‌های مفید:

سایر کتاب‌های مفید:

- ◀ نظریه زبان‌ها و ماشین‌ها (ویرایش پنجم)، نوشته پیتر لینز، ترجمه دکتر قاسم‌زاده، دکتر حسن‌پور و دکتر میبدی
- ◀ مقدمه‌ای بر نظریه محاسبات، نوشته مایکل سیپسر، ترجمه دکتر شیرعلی
- ◀ John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, and Jeffrey D. Ullman, **Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation**, Third Edition Pearson/Addison-Wesley, 2007.



دانشگاه شاهرود

نمره:

نمره:

- ◀ میان ترم: ۷
- ◀ پایان ترم: ۸
- ◀ تکلیف و کوئیز: ۵

صفحه وب درس:

<http://cs.yazd.ac.ir/farshi/Teaching/FndTheoComp3951/FndTheoComp.html>

صفحه درس در سامیاد (برای ارسال تکالیف و گرفتن کوئیز):

<http://el.yazd.ac.ir/lms/course/view.php?id=575>



دانشگاه یزد

پیش نیازها:

آنچه باید بدانید:

- ◀ ریاضی عمومی: توابع، صعودی، نزولی و
- ◀ منطق و استدلال ریاضی: گزاره‌ها، صورها $\exists$ ، $\forall$ ، $\sim$ ، اثبات با استقراء، اثبات با تناقض (فرض خلف)،
- ◀ نظریه مجموعه‌ها: اجتماع، اشتراک، افزار، رابطه هم ارزی، کلاس هم ارزی و
- ◀ ترکیبیات و گراف: گراف، درخت، درخت ریشه‌دار، مسیر بین دو راس، پیمایش درخت و
- ◀ الگوریتم و تحلیل الگوریتم: نمادهای Θ ، $\mathcal{O}$



دانشگاه شاهرود

اهداف درس:

- ◀ نظریه محاسبه چیست؟
- ◀ کسب توانایی در پیاده‌سازی محاسبات و الگوریتم‌ها
- ◀ تحلیل نظری محاسبات و کسب مهارت در اثبات ریاضی احکام
- ◀ مبانی نظریه اتوماتا و نظریه پیچیدگی
- ◀ معرفی زبان‌های صوری و انواع آن
- ◀ معرفی ماشین تورینگ به عنوان ماشین محاسباتی و مدل‌های محاسباتی.



مقدمه



دانشگاه گیلان

علوم کامپیوتر نظری :

بررسی مبانی ریاضی محاسبات.

نظریه محاسبات زیرمجموعه علوم کامپیوتر نظری است و موضوع آن این است که چه مساله‌ای قابل محاسبه است؟



دانشگاه شاهرود

مثال: اثبات با تناقض

قضیه: $\sqrt{2}$ گویا نیست.

اثبات.

(با فرض خلف) فرض کنید $\sqrt{2}$ گویا است (فرض خلف).
فرض کنید $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ، که $m, n \in \mathbb{N}$ و $\text{GCD}(m, n) = 1$ بنابراین:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$$

بنابر این m^2 زوج است و لذا m زوج است، پس $m = 2k$

$$(2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2$$

بنابر این n^2 زوج است و لذا n زوج است.

متناقض با $\text{GCD}(m, n) = 1$



دانشگاه گیلان

مثال: اثبات با تناقض

قضیه: اگر $x \in \{a, b\}^*$ و $ax = xa$ آنگاه $x = a^{[n]}$.

اثبات.

(با فرض خلف)

فرض کنید b در x ظاهر می‌شود (فرض خلف). فرض کنید $x = a^{[k]}bu$ (اولین رخداد b را در نظر بگیرید).

چون $xa = ax$:

$$a^{[k]}bua = aa^{[k]}bu = a^{[k+1]}bu$$

$$ba u = abu.$$

این تناقض است زیرا یک کلمه نمی‌تواند هم با a شروع شود و هم با b .



دانشگاه شیراز

مثال: اثبات با استقراء:

استقرای ریاضی:



دانشگاه شاهرود

مثال: اثبات با استقراء:

استقرای ریاضی:

روشی است برای اثبات منطقی گزاره‌ها. از لحاظ کارکرد مشابه دامینوها عمل می‌کند.



مثال: اثبات با استقراء:

استقرای ریاضی:

روشی است برای اثبات منطقی گزاره‌ها. از لحاظ کارکرد مشابه دامنوها عمل می‌کند.

گزاره: با شرط $x \geq -1$
به ازای n نامساوی $(1+x)^n \geq 1+nx$ درست است. $P(n)$



مثال: اثبات با استقراء:

استقرای ریاضی:

روشی است برای اثبات منطقی گزاره‌ها. از لحاظ کارکرد مشابه دامینوها عمل می‌کند.

گزاره: با شرط $x \geq -1$
به ازای n نامساوی $(1+x)^n \geq 1+nx$ درست است. $P(n)$

هدف: می‌خواهیم ثابت کنیم گزاره $P(n)$ به ازای هر n درست است.



مثال: اثبات با استقراء:

اصل استقرای ریاضی ضعیف

اگر $m \in \mathbb{N}$ و $P(n)$ یک گزاره باشد به طوری که:
۱. $P(m)$ درست باشد،

۲. به ازای هر $k \geq m$ گزاره $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ درست باشد،
آنگاه به ازای هر $n \geq m$ ، $P(n)$ درست است.



مثال: اثبات با استقراء:

اصل استقرای ریاضی ضعیف

- اگر $m \in \mathbb{N}$ و $P(n)$ یک گزاره باشد به طوری که:
۱. $P(m)$ درست باشد،
 ۲. به ازای هر $k \geq m$ گزاره $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ درست باشد،
- آنگاه به ازای هر $n \geq m$ ، $P(n)$ درست است.

مثال: ثابت کنید به ازای هر n

$$P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx.$$

پایه استقرا: $P(1) : (1+x) \geq 1+x$

فرض استقرا: $P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx$

حکم استقرا: $P(n+1) : (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$



دانشگاه شاهرود

مثال: اثبات با استقراء:

اصل استقرای ریاضی ضعیف

- اگر $m \in \mathbb{N}$ و $P(n)$ یک گزاره باشد به طوری که:
۱. $P(m)$ درست باشد،
 ۲. به ازای هر $k \geq m$ گزاره $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ درست باشد،
- آنگاه به ازای هر $n, n \geq m$ $P(n)$ درست است.

مثال: ثابت کنید به ازای هر n

$$P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx.$$

پایه استقرا: $P(1) : (1+x) \geq 1+x$

فرض استقرا: $P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx$

حکم استقرا: $P(n+1) : (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$$

$$\geq 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$



مثال: اثبات با استقراء:

اصل استقرای ریاضی قوی

اگر $m \in \mathbb{N}$ و $P(n)$ یک گزاره باشد به طوری که:
۱. $P(m)$ درست باشد،

۲. به ازای هر $k \geq m$ گزاره $P(k) \Rightarrow (P(k-1) \wedge \dots \wedge P(m))$ درست باشد،

آنگاه به ازای هر $n \geq m$ ، $P(n)$ درست است.



مثال: اثبات با استقراء:

مثال:

دنباله فیبوناچی با تعریف $F_0 = 0, F_1 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید به ازای هر n ,

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$



مثال: اثبات با استقراء:

مثال:

دنباله فیبوناچی با تعریف $F_1 = 1, F_2 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید به ازای هر n

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

اثبات:

پایه استقرا: گزاره به ازای $n = 1$ بوضوح درست است.

فرض استقرا: $F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$

حکم استقرا: $F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}.$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$



مثال: اثبات با استقراء:

مثال:

دنباله فیبوناچی با تعریف $F_0 = 0, F_1 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید به ازای هر n

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

اثبات: (استقرای قوی)

پایه استقرا: گزاره به ازای $n = 1$ بوضوح درست است.

$$F_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}, \quad k \leq n \text{ فرض استقرا: به ازای هر}$$

$$F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} \text{ حکم استقرا:}$$



مثال: اثبات با استقراء:

مثال:

دنباله فیبوناچی با تعریف $F_1 = 1, F_2 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید به ازای هر n

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

اثبات: (استقرای قوی)

پایه استقرا: گزاره به ازای $n = 1$ بوضوح درست است.

$$F_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}, \quad k \leq n \text{ فرض استقرا: به ازای هر}$$

$$F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} \text{ حکم استقرا:}$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}$$



مثال: اثبات با استقراء:

مثال:

دنباله فیبوناچی با تعریف $F_1 = 1, F_2 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید به ازای هر n

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

اثبات: (استقرای قوی)

پایه استقرا: گزاره به ازای $n = 1$ بوضوح درست است.

$$F_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}, \quad k \leq n \text{ فرض استقرا: به ازای هر } k \leq n$$

$$F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} \text{ حکم استقرا:}$$

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$



مثال: اثبات با استقراء:

مثال ۱:

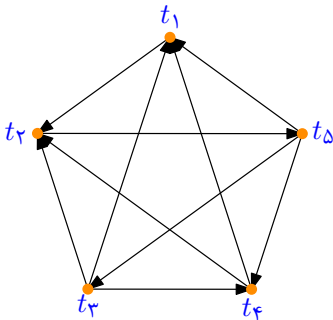
فرض کنید n تیم در یک تورنمنت شرکت می کنند. اگر هیچ دو تیمی مساوی نشوند، ثابت کنید دنباله‌ای از تیم‌ها مثل $\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ وجود دارد به طوری که تیم t_1 از تیم t_2 و تیم t_2 از تیم t_3 و ... برده باشد.



مثال: اثبات با استقراء:

مثال ۱:

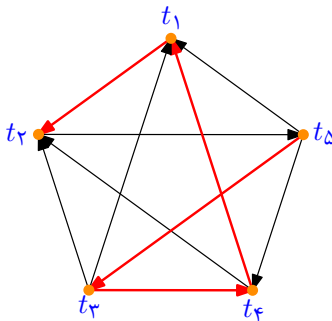
فرض کنید n تیم در یک تورنمنت شرکت می کنند. اگر هیچ دو تیمی مساوی نشوند، ثابت کنید دنباله‌ای از تیم‌ها مثل $\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ وجود دارد به طوری که تیم t_1 از تیم t_2 و تیم t_2 از تیم t_3 و ... برده باشد.



مثال: اثبات با استقراء:

مثال ۱:

فرض کنید n تیم در یک تورنمنت شرکت می کنند. اگر هیچ دو تیمی مساوی نشوند، ثابت کنید دنباله‌ای از تیم‌ها مثل $\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ وجود دارد به طوری که تیم t_1 از تیم t_2 و تیم t_2 از تیم t_3 و ... برده باشد.



$\langle t_5, t_3, t_4, t_1, t_2 \rangle$



دانشگاه شاهرود

مثال: اثبات با استقراء:

اثبات:

پایه استقرا: در یک تورنمنت با $n = 1$ تیم حکم بوضوح درست است.
فرض استقرا: برای هر تورنمنت با n تیم دنباله وجود دارد.
حکم استقرا: برای هر تورنمنت با $n + 1$ تیم دنباله وجود دارد.



مثال: اثبات با استقراء:

اثبات:

پایه استقرا: در یک تورنمنت با $n = 1$ تیم حکم بوضوح درست است.
فرض استقرا: برای هر تورنمنت با n تیم دنباله وجود دارد.
حکم استقرا: برای هر تورنمنت با $n + 1$ تیم دنباله وجود دارد.

یک تورنمنت دلخواه با $n + 1$ تیم در نظر بگیرید.

$$\{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}\}$$

با حذف t_{n+1} از تورنمنت یک تورنمنت n تیمی حاصل می‌شود که طبق فرض استقرا دارای دنباله است.

فرض کنید $\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ دنباله مورد نظر باشد.



مثال: اثبات با استقراء:

اثبات:

پایه استقرا: در یک تورنمنت با $n = 1$ تیم حکم بوضوح درست است.
فرض استقرا: برای هر تورنمنت با n تیم دنباله وجود دارد.
حکم استقرا: برای هر تورنمنت با $n + 1$ تیم دنباله وجود دارد.

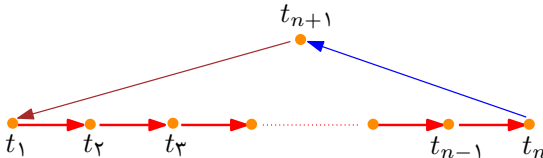
یک تورنمنت دلخواه با $n + 1$ تیم در نظر بگیرید.

$$\{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}\}$$

با حذف t_{n+1} از تورنمنت یک تورنمنت n تیمی حاصل می‌شود که طبق فرض استقرا دارای دنباله است.

فرض کنید $\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ دنباله مورد نظر باشد.

حالت ۱:



دانشگاه گیلان

مثال: اثبات با استقراء:

اثبات:

پایه استقرا: در یک تورنمنت با $n = 1$ تیم حکم بوضوح درست است.
فرض استقرا: برای هر تورنمنت با n تیم دنباله وجود دارد.
حکم استقرا: برای هر تورنمنت با $n + 1$ تیم دنباله وجود دارد.

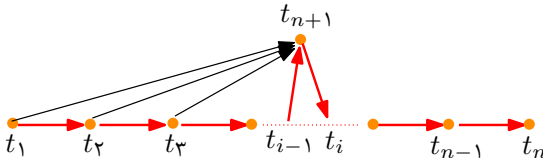
یک تورنمنت دلخواه با $n + 1$ تیم در نظر بگیرید.

$$\{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}\}$$

با حذف t_{n+1} از تورنمنت یک تورنمنت n تیمی حاصل می‌شود که طبق فرض استقرا دارای دنباله است.

فرض کنید $\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ دنباله مورد نظر باشد.

حالت ۲:



مثال: اثبات با استقراء:

مثال:

فرض کنید n خط دو به دو متقاطع در صفحه داده شده‌اند به طوری که هیچ سه خطی هم‌رس نیستند. این خطوط صفحه را دقیقاً به چند ناحیه تقسیم می‌کند؟



دانشگاه شاهرود

مثال: اثبات با استقراء:

مثال:

فرض کنید n خط دو به دو متقاطع در صفحه داده شده‌اند به طوری که هیچ سه خطی هم‌رس نیستند. این خطوط صفحه را دقیقاً به چند ناحیه تقسیم می‌کند؟

تعداد ناحیه‌ها با رسم n خط: $S(n)$



دانشگاه شاهرود

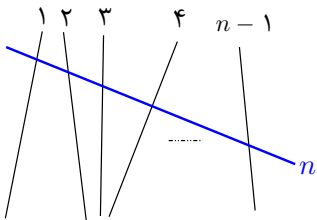
مثال: اثبات با استقراء:

مثال:

فرض کنید n خط دو به دو به دو متقاطع در صفحه داده شده‌اند به طوری که هیچ سه خطی هم‌رس نیستند. این خطوط صفحه را دقیقاً به چند ناحیه تقسیم می‌کند؟

تعداد ناحیه‌ها با رسم n خط: $S(n)$

سوال: با رسم خط n ام چند ناحیه به $S(n-1)$ اضافه می‌شود؟



دانشگاه گیلان

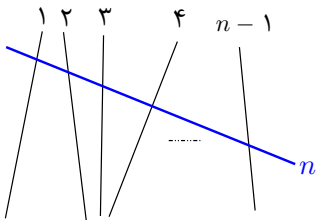
مثال: اثبات با استقراء:

مثال:

فرض کنید n خط دو به دو به دو متقاطع در صفحه داده شده‌اند به طوری که هیچ سه خطی هم‌رس نیستند. این خطوط صفحه را دقیقاً به چند ناحیه تقسیم می‌کند؟

تعداد ناحیه‌ها با رسم n خط: $S(n)$

سوال: با رسم خط n ام چند ناحیه به $S(n-1)$ اضافه می‌شود؟



$$S(n) = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ S(n-1) + n & n \geq 2 \end{cases}$$



مثال: اثبات با استقراء:

$$S(n) = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ S(n-1) + n & n \geq 2 \end{cases}$$



مثال: اثبات با استقراء:

$$S(n) = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ S(n-1) + n & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n-1) + n \\ &= S(n-2) + (n-1) + n \\ &= S(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\ &\vdots \\ &= S(1) + 2 + 3 + \cdots + n \\ &= 2 + 2 + 3 + \cdots + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1. \end{aligned}$$



