

ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

(علوم کامپیوتر)

نیمسال دوم ۱۳۸۹-۱۳۹۰

فصل دوم: مبانی استقرا و شمارش

استقرای ریاضی:

استقرای ریاضی:

روشی است برای اثبات منطقی گزاره‌ها. از لحاظ کارکرد مشابه دامینوها عمل می‌کند.

استقرای ریاضی:

روشی است برای اثبات منطقی گزاره‌ها. از لحاظ کارکرد مشابه دامینوها عمل می‌کند.

گزاره: با شرط $x \geq -1$
به ازای n نامساوی $(1+x)^n \geq 1+nx$ درست است. $P(n)$

استقرای ریاضی:

روشی است برای اثبات منطقی گزاره‌ها. از لحاظ کارکرد مشابه دامینوها عمل می‌کند.

گزاره: با شرط $x \geq -1$
به ازای n نامساوی $(1+x)^n \geq 1+nx$ درست است. $P(n)$

هدف: می‌خواهیم ثابت کنیم گزاره $P(n)$ به ازای هر n درست است.

اصل استقرای ریاضی ضعیف

اگر $m \in \mathbb{N}$ و $P(n)$ یک گزاره باشد به طوری که:
۱. $P(m)$ درست باشد،

۲. به ازای هر $k \geq m$ گزاره $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ درست باشد،
آنگاه به ازای هر $n \geq m$ ، $P(n)$ درست است.

اصل استقرای ریاضی ضعیف

- اگر $m \in \mathbb{N}$ و $P(n)$ یک گزاره باشد به طوری که:
۱. $P(m)$ درست باشد،
 ۲. به ازای هر $k \geq m$ گزاره $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ درست باشد،
- آنگاه به ازای هر $n \geq m$ ، $P(n)$ درست است.

مثال: ثابت کنید به ازای هر n

$$P(n) : (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

پایه استقرا: $P(1) : (1 + x) \geq 1 + x$

فرض استقرا: $P(n) : (1 + x)^n \geq 1 + nx$

حکم استقرا: $P(n+1) : (1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

اصل استقرای ریاضی ضعیف

- اگر $m \in \mathbb{N}$ و $P(n)$ یک گزاره باشد به طوری که:
۱. $P(m)$ درست باشد،
 ۲. به ازای هر $k \geq m$ گزاره $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ درست باشد،
- آنگاه به ازای هر $n \geq m$ ، $P(n)$ درست است.

مثال: ثابت کنید به ازای هر n

$$P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx.$$

پایه استقرا: $P(1) : (1+x) \geq 1+x$

فرض استقرا: $P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx$

حکم استقرا: $P(n+1) : (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$$

$$\geq 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

اصل استقرای ریاضی قوی

اگر $m \in \mathbb{N}$ و $P(n)$ یک گزاره باشد به طوری که:
۱. $P(m)$ درست باشد،

۲. به ازای هر $k \geq m$ گزاره $P(k) \Rightarrow (P(m) \wedge \dots \wedge P(k-1))$ درست باشد،

آنگاه به ازای هر $n \geq m$ ، $P(n)$ درست است.

مثال:

دنباله فیبوناچی با تعریف $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید به ازای هر n ,

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

مثال:

دنباله فیبوناچی با تعریف $F_0 = 0, F_1 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید به ازای هر n ,

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

اثبات:

پایه استقرا: گزاره به ازای $n = 1$ بوضوح درست است.

فرض استقرا: $F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

حکم استقرا: $F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

مثال:

دنباله فیبوناچی با تعریف $F_0 = 0, F_1 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید به ازای هر n ,

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

اثبات: (استقرای قوی)

پایه استقرا: گزاره به ازای $n = 1$ بوضوح درست است.

فرض استقرا: به ازای هر $k \leq n$

$$F_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}.$$

حکم استقرا:

$$F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

مثال:

دنباله فیبوناچی با تعریف $F_0 = 0, F_1 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید به ازای هر n ,

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

اثبات: (استقرای قوی)

پایه استقرا: گزاره به ازای $n = 1$ بوضوح درست است.

فرض استقرا: به ازای هر $k \leq n$

$$F_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}.$$

حکم استقرا:

$$F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

مثال:

دنباله فیبوناچی با تعریف $F_0 = 0, F_1 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید به ازای هر n ,

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

اثبات: (استقرای قوی)

پایه استقرا: گزاره به ازای $n = 1$ بوضوح درست است.

فرض استقرا: به ازای هر $k \leq n$ $F_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}$.

حکم استقرا: $F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$.

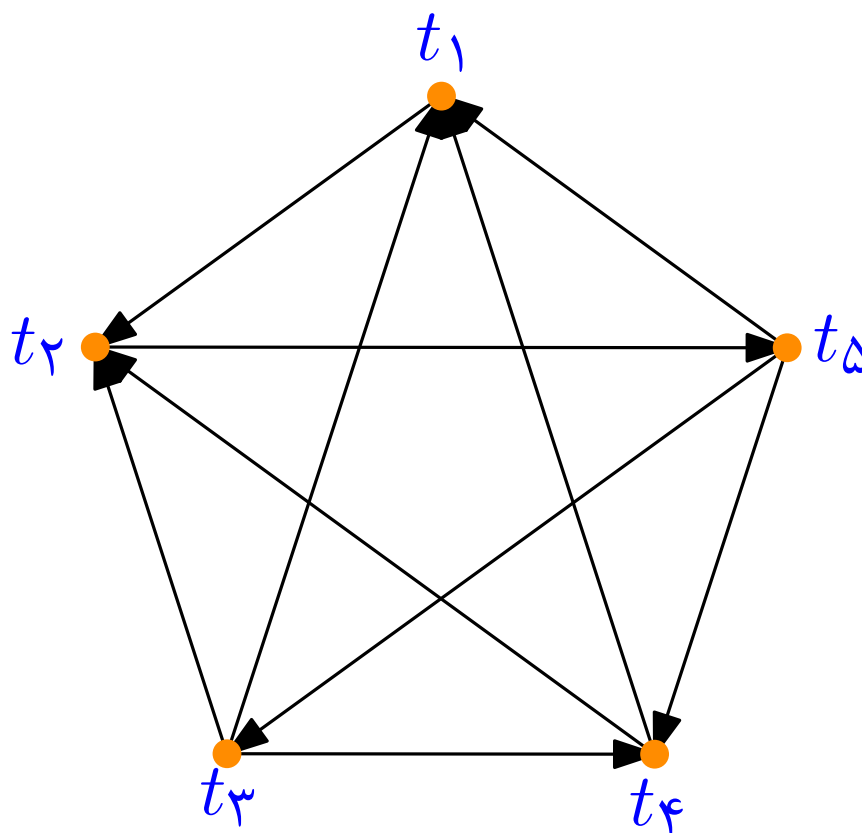
$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

مثال ۱:

فرض کنید n تیم در یک تورنمنت شرکت می کنند. اگر هیچ دو تیمی مساوی نشوند، ثابت کنید دنباله‌ای از تیم‌ها مثل $\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ وجود دارد به طوری که تیم t_1 از تیم t_2 و تیم t_2 از تیم t_3 و $\dots$ برده باشد.

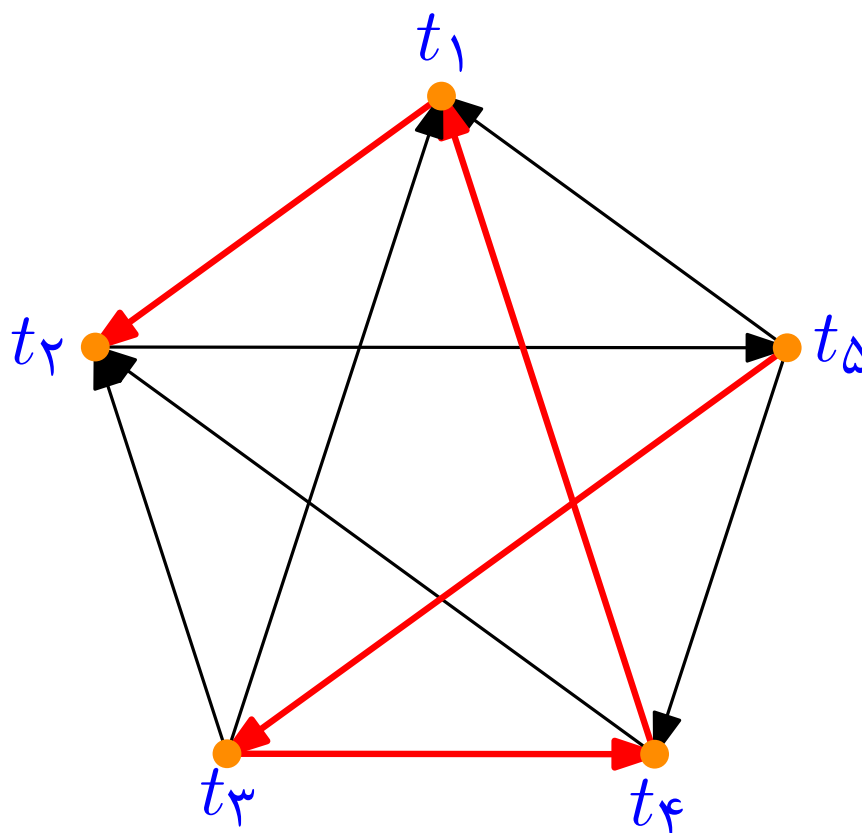
مثال ۱:

فرض کنید n تیم در یک تورنمنت شرکت می کنند. اگر هیچ دو تیمی مساوی نشوند، ثابت کنید دنباله‌ای از تیم‌ها مثل $\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ وجود دارد به طوری که تیم t_1 از تیم t_2 و تیم t_2 از تیم t_3 و $\dots$ برده باشد.



مثال ۱:

فرض کنید n تیم در یک تورنمنت شرکت می کنند. اگر هیچ دو تیمی مساوی نشوند، ثابت کنید دنباله‌ای از تیم‌ها مثل $\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ وجود دارد به طوری که تیم t_1 از تیم t_2 و تیم t_2 از تیم t_3 و $\dots$ برده باشد.



$\langle t_5, t_3, t_4, t_1, t_2 \rangle$

اثبات:

پایه استقرا: در یک تورنمنت با $n = 1$ تیم حکم بوضوح درست است.
فرض استقرا: برای هر تورنمنت با n تیم دنباله وجود دارد.
حکم استقرا: برای هر تورنمنت با $n + 1$ تیم دنباله وجود دارد.

اثبات:

پایه استقرا: در یک تورنمنت با $n = 1$ تیم حکم بوضوح درست است.
فرض استقرا: برای هر تورنمنت با n تیم دنباله وجود دارد.
حکم استقرا: برای هر تورنمنت با $n + 1$ تیم دنباله وجود دارد.

یک تورنمنت دلخواه با $n + 1$ تیم در نظر بگیرید.
 $\{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}\}$

با حذف t_{n+1} از تورنمنت یک تورنمنت n تیمی حاصل می‌شود که طبق فرض استقرا دارای دنباله است.
فرض کنید $\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ دنباله مورد نظر باشد.



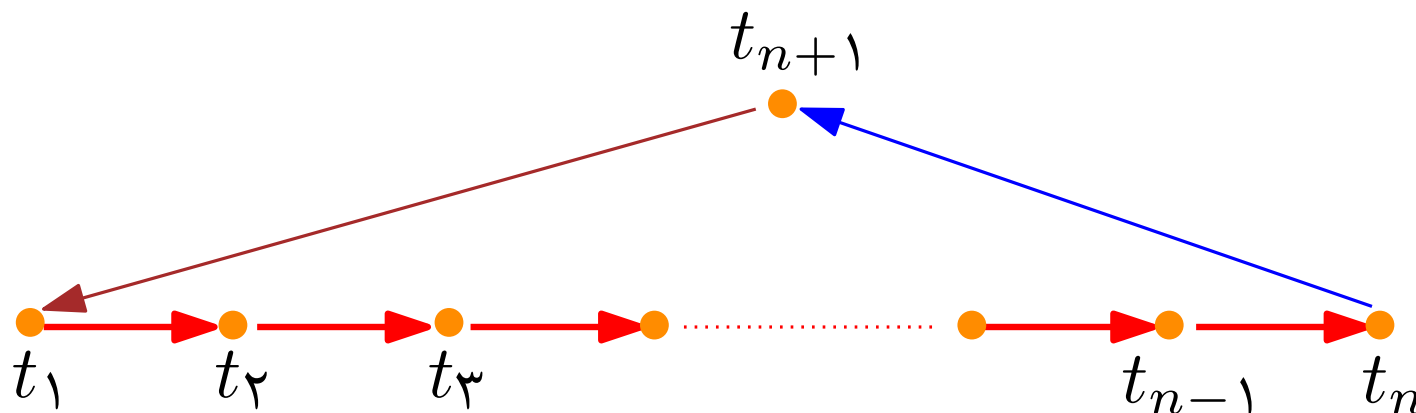
اثبات:

پایه استقرا: در یک تورنمنت با $n = 1$ تیم حکم بوضوح درست است.
فرض استقرا: برای هر تورنمنت با n تیم دنباله وجود دارد.
حکم استقرا: برای هر تورنمنت با $n + 1$ تیم دنباله وجود دارد.

یک تورنمنت دلخواه با $n + 1$ تیم در نظر بگیرید.
 $\{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}\}$

با حذف t_{n+1} از تورنمنت یک تورنمنت n تیمی حاصل می‌شود که طبق فرض استقرا دارای دنباله است.
فرض کنید $\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ دنباله مورد نظر باشد.

حالت ۱:



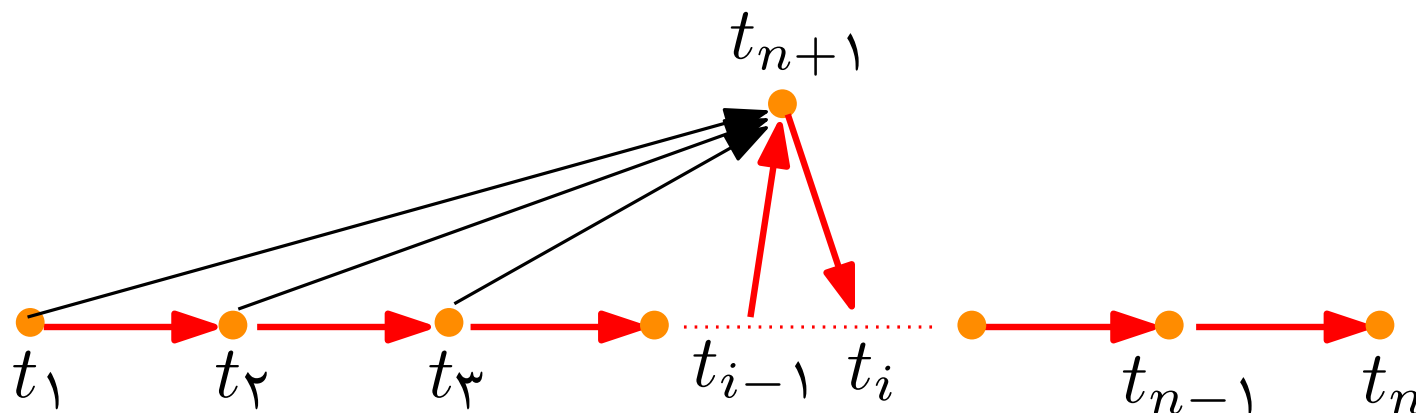
اثبات:

پایه استقرا: در یک تورنمنت با $n = 1$ تیم حکم بوضوح درست است.
فرض استقرا: برای هر تورنمنت با n تیم دنباله وجود دارد.
حکم استقرا: برای هر تورنمنت با $n + 1$ تیم دنباله وجود دارد.

یک تورنمنت دلخواه با $n + 1$ تیم در نظر بگیرید.
 $\{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}\}$

با حذف t_{n+1} از تورنمنت یک تورنمنت n تیمی حاصل می‌شود که طبق فرض استقرا دارای دنباله است.
فرض کنید $\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ دنباله مورد نظر باشد.

حالت ۲:



مثال:

فرض کنید n خط دو به دو متقاطع در صفحه داده شده‌اند به طوری که هیچ سه خطی هم‌رس نیستند. این خطوط صفحه را دقیقاً به چند ناحیه تقسیم می‌کند؟

مثال:

فرض کنید n خط دو به دو متقاطع در صفحه داده شده‌اند به طوری که هیچ سه خطی هم‌رس نیستند. این خطوط صفحه را دقیقاً به چند ناحیه تقسیم می‌کند؟

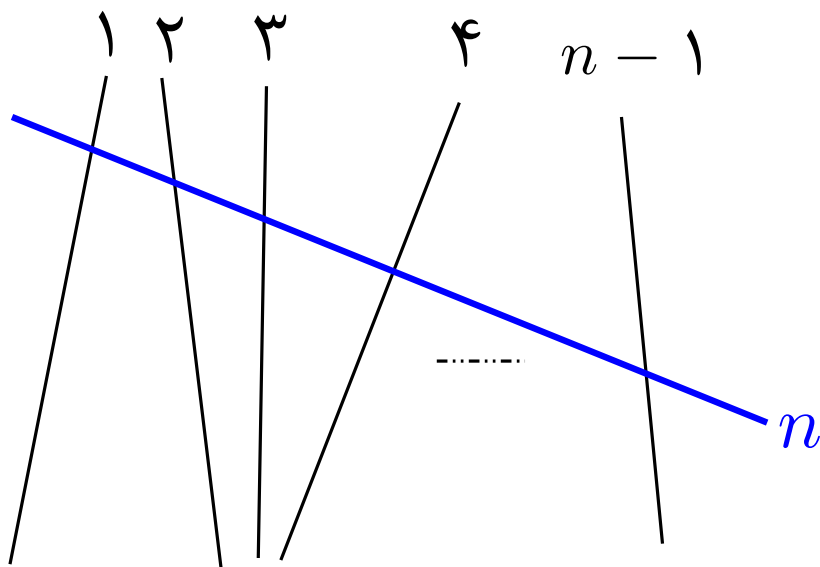
تعداد ناحیه‌ها با رسم n خط: $S(n)$

مثال:

فرض کنید n خط دو به دو متقاطع در صفحه داده شده‌اند به طوری که هیچ سه خطی هم‌رس نیستند. این خطوط صفحه را دقیقاً به چند ناحیه تقسیم می‌کند؟

تعداد ناحیه‌ها با رسم n خط: $S(n)$

سوال: با رسم خط n ام چند ناحیه به $S(n-1)$ اضافه می‌شود؟

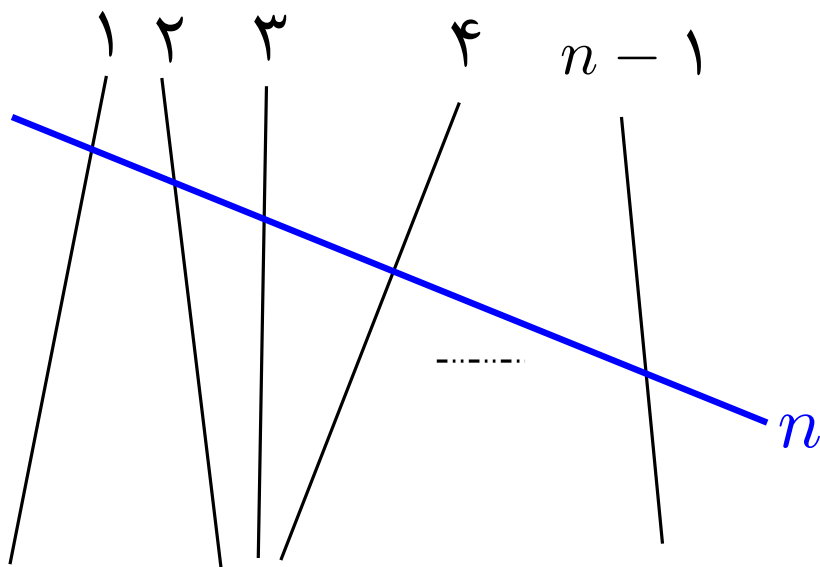


مثال:

فرض کنید n خط دو به دو متقاطع در صفحه داده شده‌اند به طوری که هیچ سه خطی هم‌رس نیستند. این خطوط صفحه را دقیقاً به چند ناحیه تقسیم می‌کند؟

تعداد ناحیه‌ها با رسم n خط: $S(n)$

سوال: با رسم خط n ام چند ناحیه به $S(n-1)$ اضافه می‌شود؟



$$S(n) = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ S(n-1) + n & n \geq 2 \end{cases}$$

$$S(n) = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ S(n-1) + n & n \geq 2 \end{cases}$$

$$S(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ S(n-1) + n & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n-1) + n \\ &= S(n-2) + (n-1) + n \\ &= S(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\ &\vdots \\ &= S(1) + 2 + 3 + \dots + n \\ &= 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1. \end{aligned}$$

پایان فصل دوم