

برنامه ریزی حرکت ربات

قسمت دوم (قسمت ۱۳,۳ و ۱۳,۴)

سید حسین حسینی
زمستان ۹۳

۱۳,۳ _ جمع های مینکوفسکی

13.3 _ Minkowski Sums

جمع‌های مینکوفسکی

_ در بخش قبل مسئله برنامه‌ریزی حرکت یک ربات نقطه‌ای را حل کردیم

■ محاسبه نقشه دوزنقه‌ای از فضای آزاد

■ استفاده از نقشه دوزنقه‌ای برای برنامه‌ریزی حرکت

_ اگر ربات چندضلعی باشد از روشی مشابه می‌توان استفاده نمود، اما یک مشکل وجود دارد:

■ موانع فضای پیکربندی دیگر هم‌اندازه موانع در فضای کار نیست

جمع‌های مینکوفسکی

■ فرض کنید **چند ضلعی** R **محدب** بوده و

چند ضلعی P هم محدب باشد.

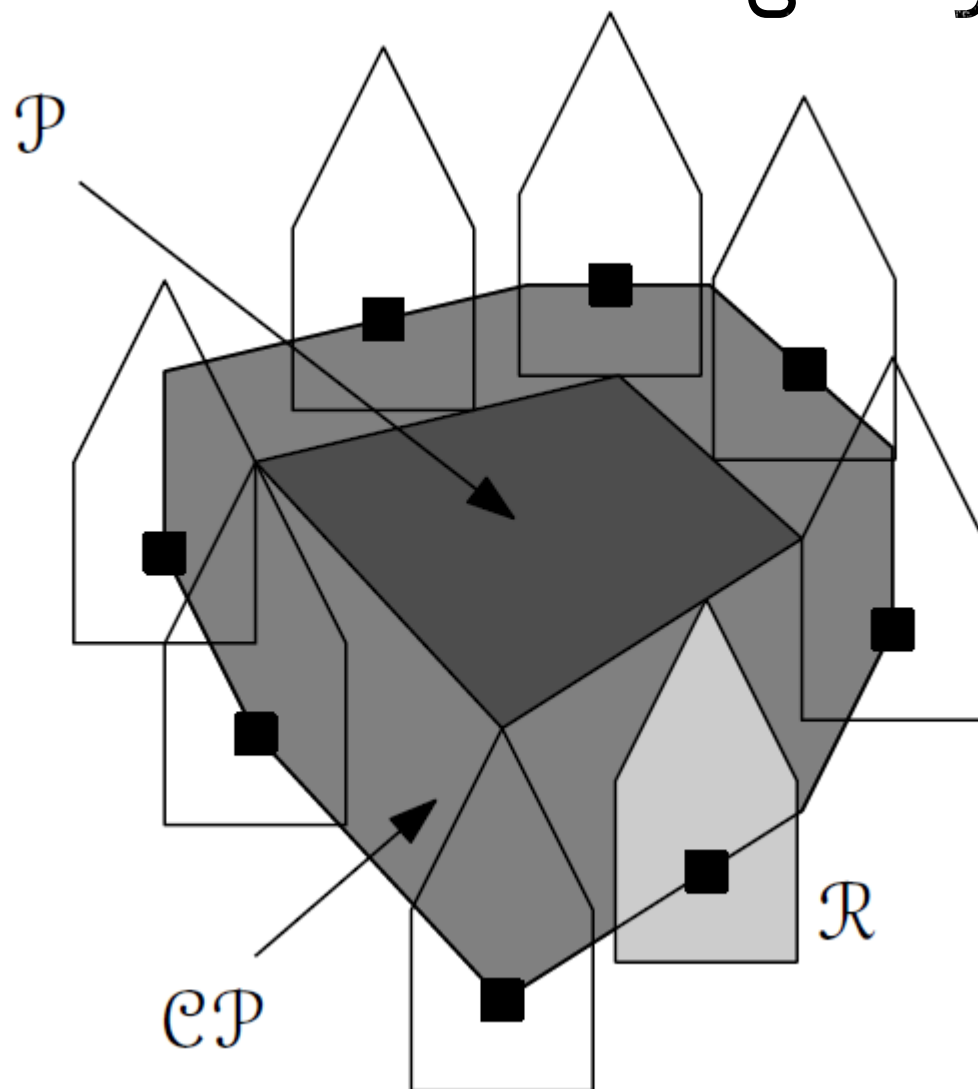
$\mathcal{C}$ -obstacle (فضای پیکربندی یک مانع)

■ مجموعه ای از نقاط در فضای پیکربندی بطوریکه مکان مطابق با آن نقاط از R با P برخورد کند.

$$CP = \{(x, y) : R(x, y) \cap P \neq \emptyset\}$$

■ تصور کردن شکل CP با لغزاندن R در طول P : ردیابی کردن منحنی نقطه مرجع

جمع‌های مینکوفسکی



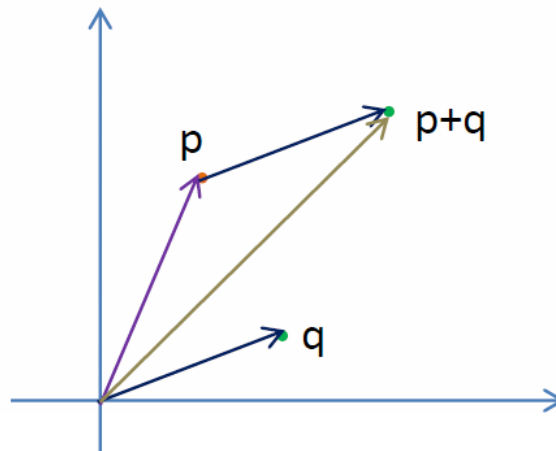
جمع‌های مینکوفسکی

– جمع مینکوفسکی دو مجموعه $S1 \subseteq \mathbb{R}^2$ و $S2 \subseteq \mathbb{R}^2$ که با $S1 \oplus S2$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\blacksquare S1 \oplus S2 = \{p + q : p \in S1, q \in S2\}$$

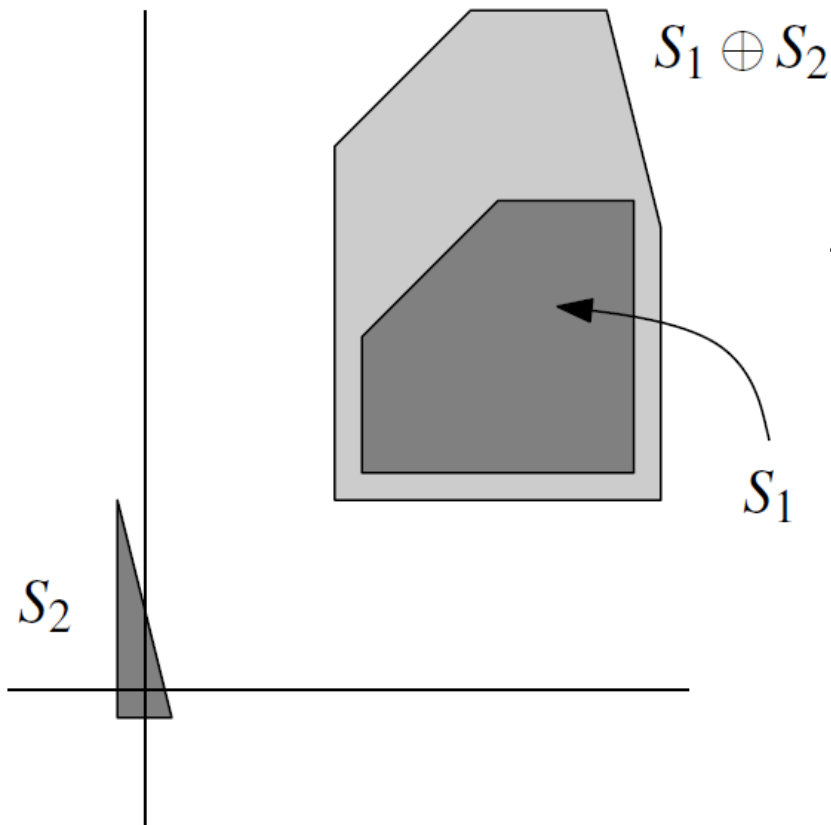
که $p+q$ بردار مجموع دو بردار p و q می‌باشد که اگر $p=(p_x, p_y)$ و $q=(q_x, q_y)$ باشد داریم:

$$p+q=(p_x+q_x, p_y+q_y)$$



جمع‌های مینکوفسکی

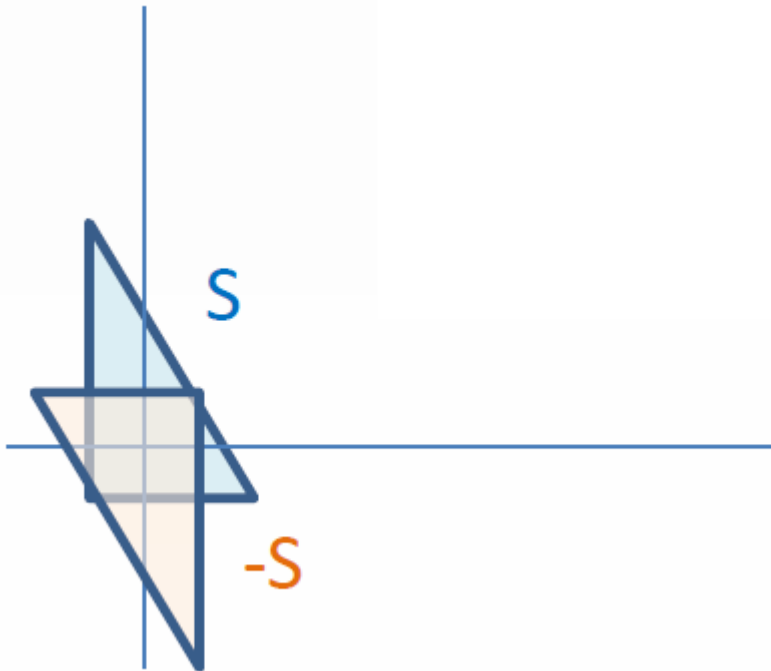
از آنجایی که یک چند ضلعی یک مجموعه مسطح است، جمع‌های مینکوفسکی برای آن‌ها به کار گرفته می‌شود



جمع‌های مینکوفسکی

نمادگذاری دقیق‌تر برای بیان **C-obstacles** به عنوان جمع مینکوفسکی:

- برای یک نقطه $p=(p_x, p_y)$ ما $-p=(-p_x, -p_y)$ را تعریف می‌کنیم.
- برای یک مجموعه S ما $-S = \{-p : p \in S\}$ تعریف می‌کنیم.



جمع‌های مینکوفسکی

قضیه ۱۳.۳

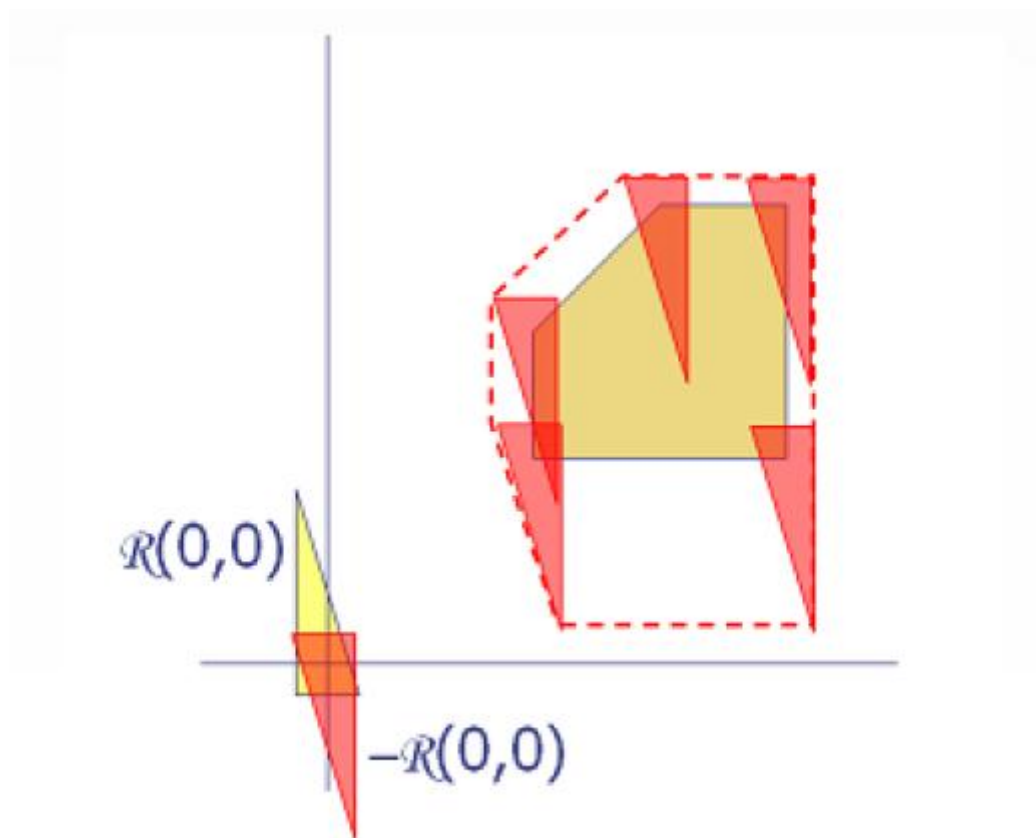
فرض کنید R یک ربات انتقالی مسطح و P یک مانع باشد، آنگاه CP برابر $P \oplus (-R(0,0))$ می باشد

برهان:

باید نشان دهیم $R(x,y)$ و P برخورد دارند اگر و تنها اگر

$$(x,y) \in P \oplus (-R(0,0))$$

جمع‌های مینکوفسکی



جمع‌های مینکوفسکی

_ حال در ادامه بحث خواصی از جمع‌های مینکوفسکی را بیان می‌کنیم.

مشاهده ۱۳.۴

فرض کنید P و R دو شی در صفحه باشند و

$$CP = P \oplus R$$

آنگاه دورترین نقطه در جهت $\vec{d}$ روی CP ، مجموع دورترین نقاط در جهت $\vec{d}$ روی P و R می‌باشد.

اثبات مشاهده ۱۳,۴ (در کتاب نیامده) رفت

فرض : p و r دورترین نقطه به ترتیب در چندضلعی P و R در جهت $\vec{d}$ باشند
حکم : $p + r$ دورترین نقطه در جهت $\vec{d}$ در چندضلعی CP است.

$$\begin{array}{ll} \text{دورترین نقطه در جهت } \vec{d} \text{ در چندضلعی } P & p : \forall q \in p \quad \vec{d}\vec{p} \geq \vec{d}\vec{q} \\ \text{دورترین نقطه در جهت } \vec{d} \text{ در چندضلعی } R & r : \forall q' \in p \quad \vec{d}\vec{r} \geq \vec{d}\vec{q'} \end{array}$$

حال دورترین نقاط چندضلعی P و R یعنی p و r را جمع مینکوفسکی کنید.

$$\begin{aligned} &= \vec{d}\vec{p} + \vec{d}\vec{r} \geq \vec{d}\vec{q} + \vec{d}\vec{q'} \\ &= \vec{d}(\vec{p} + \vec{r}) \geq \vec{d}(\vec{q} + \vec{q'}) \\ &= \vec{d}\vec{c} \geq \vec{d}\vec{c'} \end{aligned}$$

که این دقیقاً تعریف دورترین نقطه در جهت $\vec{d}$ در چند ضلعی CP است.
یعنی هر دو نقطه‌ای را که در جهت d از P و R جمع کنیم، جمع p و r از آنها بیشتر (نه اکید) است.

اثبات مشاهده ۱۳,۴ (در کتاب نیامده)

برگشت

فرض : c دورترین نقطه در جهت $\vec{d}$ در چندضلعی CP است
 حکم : $c = p + r$ که p و r دورترین نقاط در جهت $\vec{d}$ به ترتیب در چندضلعی‌های P و R است.

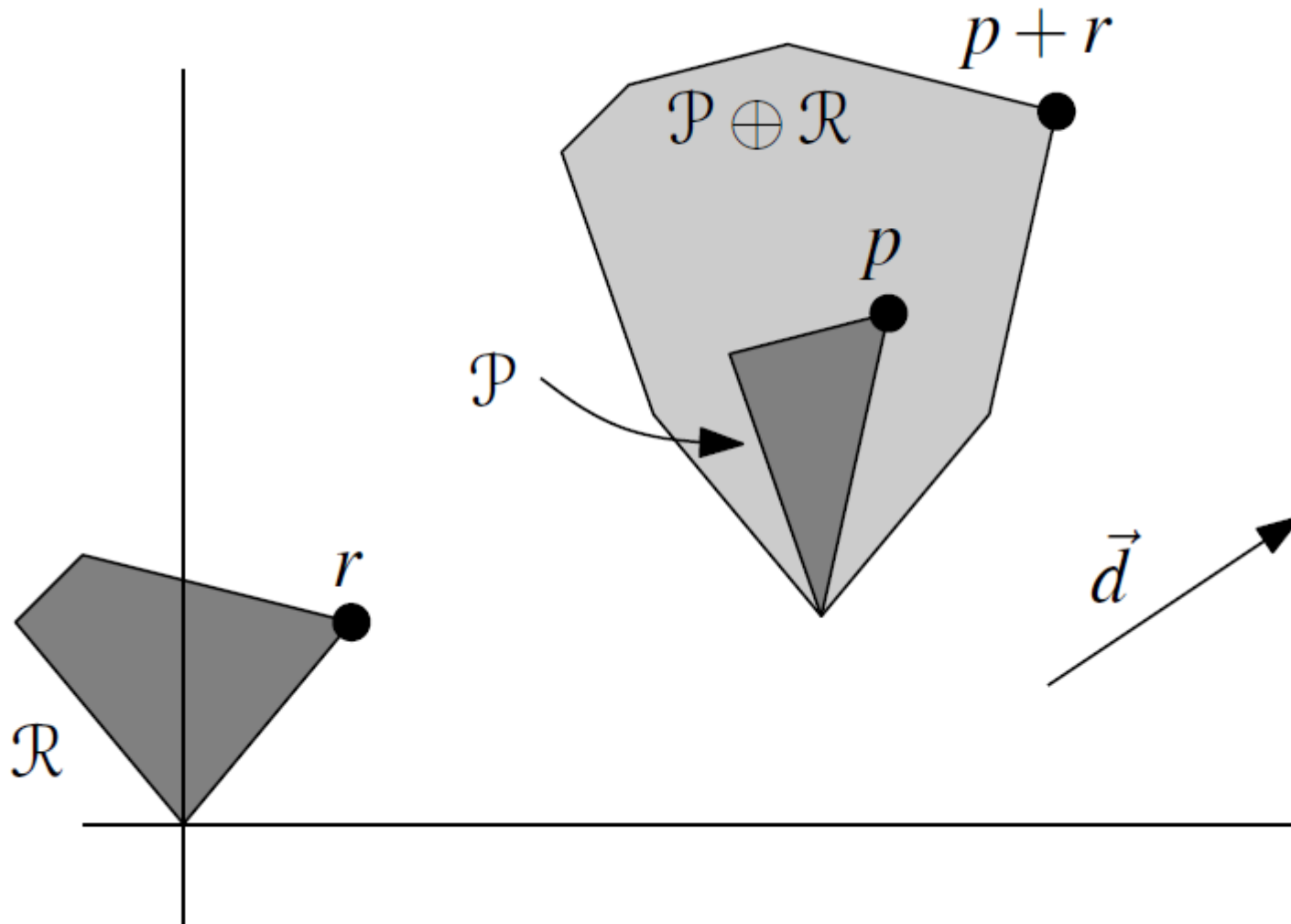
فرض خلف: c جمع دورترین نقاط نباشد،
 پس حداقل p یا r دورترین نقطه در جهت $\vec{d}$ در چند ضلعی خودشان نیستند مثلاً p دورترین نباشد.

$$\begin{aligned} & \exists p' \in P: \vec{dp'} > \vec{dp} \\ & = dp' + dr > dp + dr \\ & = d(p' + r) > d(p + r) \end{aligned}$$

$$= dc' > dc \quad \times$$

که این با فرض دورترین بودن نقطه c در جهت d در چندضلعی P تناقض است.

جمع‌های مینکوفسکی



جمع‌های مینکوفسکی

با استفاده از مشاهده قبلی اثبات می‌کنیم جمع مینکوفسکی پیچیدگی خطی دارد.

قضیه ۱۳.۵

فرض کنید P و R دو چندضلعی محدب به ترتیب با n و m یال باشند.
آنگاه جمع مینکوفسکی $P \oplus R$ یک چندضلعی محدب با حداکثر $m + n$ یال خواهد بود.

جمع‌های مینکوفسکی

برای نشان دادن **محدب بودن جمع مینکوفسکی دو مجموعه محدب (در کتاب نیامده)** از تعریف آن استفاده می‌شود.

طبق تعریف چندضلعی محدب به ازای هر دو نقطه p و q خط واصل آن در داخل چندضلعی است. خب از این تعریف استفاده کرده و تعریف زیر برای هر چند ضلعی محدب داریم:

ترکیب محدب دو نقطه‌ای: $C_\lambda = \lambda A + (1 - \lambda) \quad 0 \leq \lambda \leq 1$

$$\begin{aligned} p &= p' + r' : p' \in P, r' \in R \\ q &= p'' + r'' : p'' \in P, r'' \in R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_\lambda &= p\lambda + (1 - \lambda)q \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \\ &= (p' + r') + (1 - \lambda)(p'' + r'') \\ &= p' + r' + p'' + r'' - \lambda p'' - \lambda r'' \\ &= p' + p'' - \lambda p'' + r' + r'' - \lambda r'' \\ &= p' + (1 - \lambda)p'' + r + (1 - \lambda)r'' \end{aligned}$$

$$p' + (1 - \lambda)p'' \in P \quad \text{و} \quad r + (1 - \lambda)r'' \in R \quad \text{که}$$

$$C_\lambda \in P \oplus R \quad \text{پس}$$

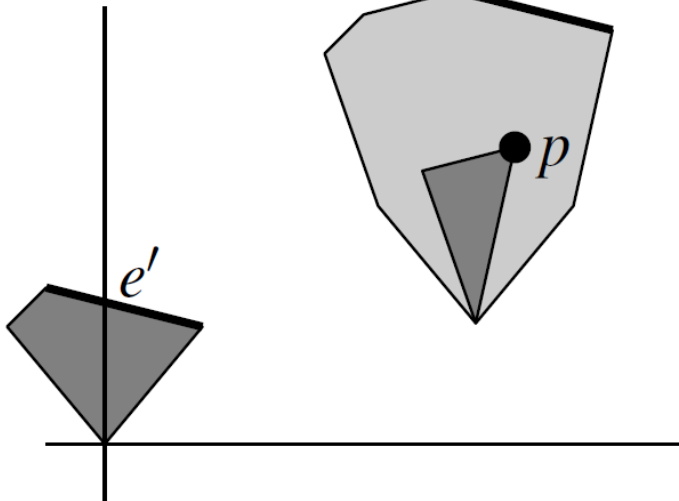
جمع‌های مینکوفسکی

برهان:

محدب بودن جمع مینکوفسکی دو مجموعه محدب، مستقیماً از تعریف به دست می‌آید.

برای این که بینیم پیچیدگی مجموع مینکوفسکی خطی است شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$e = e' \oplus p$$



جمع‌های مینکوفسکی

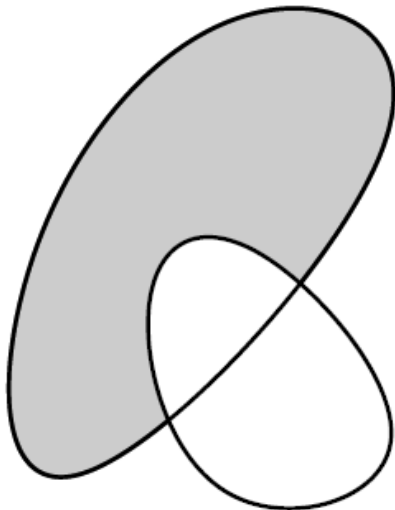
_نکته‌ای دیگر وجود دارد: مرزهای دو جمع مینکوفسکی به شیوه خاص با یکدیگر در تعامل دارند، برای دیدن این موضوع لازم است یک سری مفاهیمی دیگر بیان شود.

_شبه‌دیسک‌ها

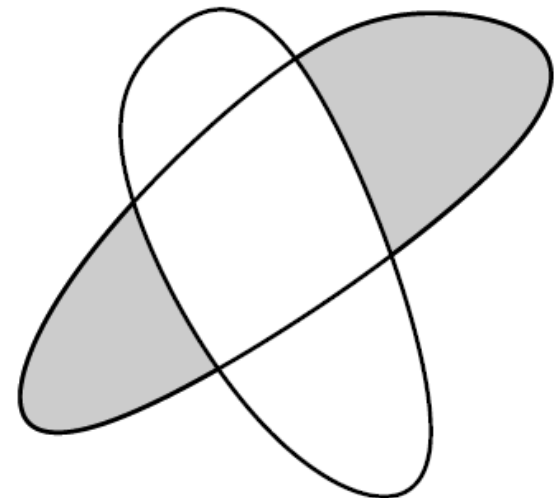
دو شی O_1 و O_2 که هریک با منحنی بسته ساده محدود شده‌اند را در نظر بگیرید جفت O_1 و O_2 را یک جفت شبه‌دیسک گویند هرگاه مرزهایشان ∂O_1 و ∂O_2 حداکثر در دو نقطه برخورد داشته باشند.

جمع‌های مینکوفسکی

pseudodiscs

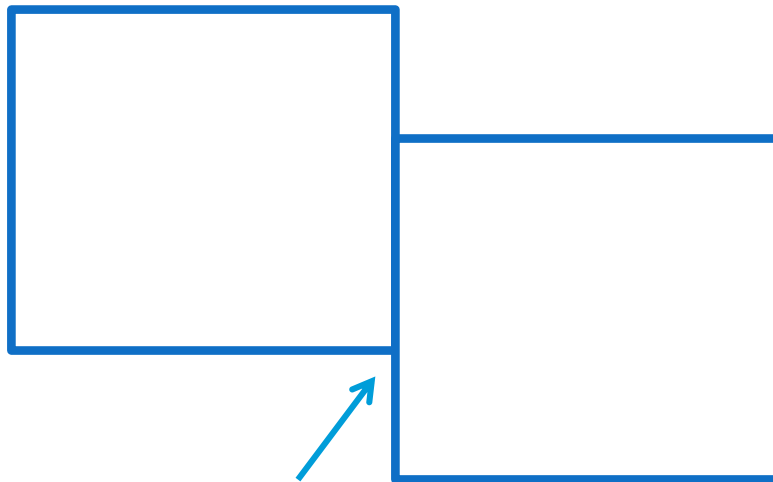


not pseudodiscs



جمع‌های مینکوفسکی

با توجه به شکل زیر تعریفی که از شبه‌دیسک‌ها گفته شده به اندازه کافی کامل نیست.



جمع‌های مینکوفسکی

تعریف رسمی:

O_1 و O_2 را یک جفت شبه‌دیسک گوئیم اگر شرایط زیر برای آن برقرار باشد.

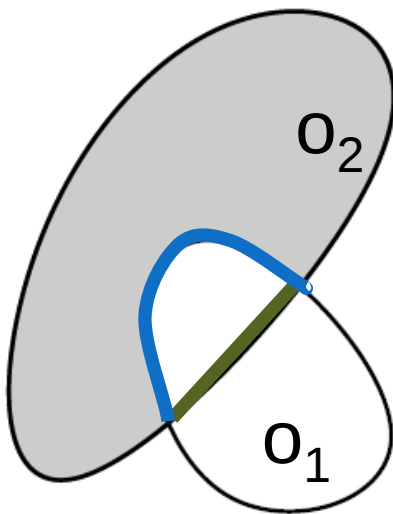
▪ $\partial O_2 \cap \text{int}(O_1)$ متصل باشد.

▪ $\partial O_1 \cap \text{int}(O_2)$ متصل باشد.

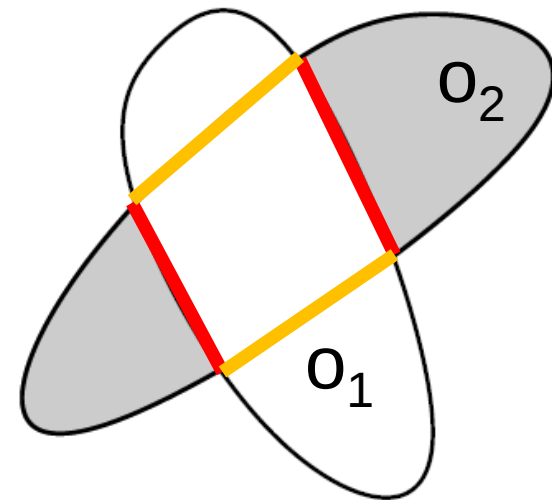
$\text{int}(O)$ ناحیه داخلی شی O می باشد.

جمع‌های مینکوفسکی

pseudodiscs



not pseudodiscs



جمع‌های مینکوفسکی

مجموعه شبه‌دیسک‌ها:

یک مجموعه از اشیاء که هریک با یک منحنی بسته ساده محدود شده است را یک مجموعه شبه‌دیسک می‌نامیم اگر هر جفت شیء در آن مجموعه یک جفت شبه‌دیسک باشد.

جمع‌های مینکوفسکی

تعریف:

دو چندضلعی P و P' را در نظر بگیرید. یک نقطه اشتراک
 $p \in \partial P \cap \partial P'$

یک *boubndary crossing* است اگر ∂P از داخل P' به خارج P' در p عبور کند.

مشاهده ۱۳.۶:

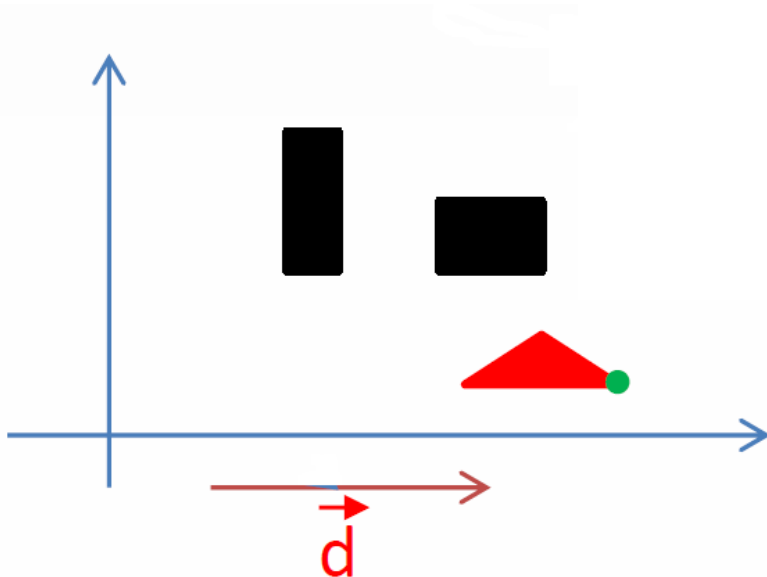
یک جفت شبه دیسک چندضلعی P و P' حداکثر دو *boundary crossing* دارند.



جمع‌های مینکوفسکی

در ادامه ثابت می‌کنیم یک مجموعه از جمع‌های مینکوفسکی یک مجموعه شبه دیسک تشکیل می‌دهند، اما ابتدا به مشاهده و تعاریف زیر نیاز داریم.

یک چندضلعی P دورتر از یک چندضلعی دیگر P' در جهت $\vec{d}$ است، اگر دورترین نقطه P در آن جهت از دورترین نقطه P' دورتر باشد.



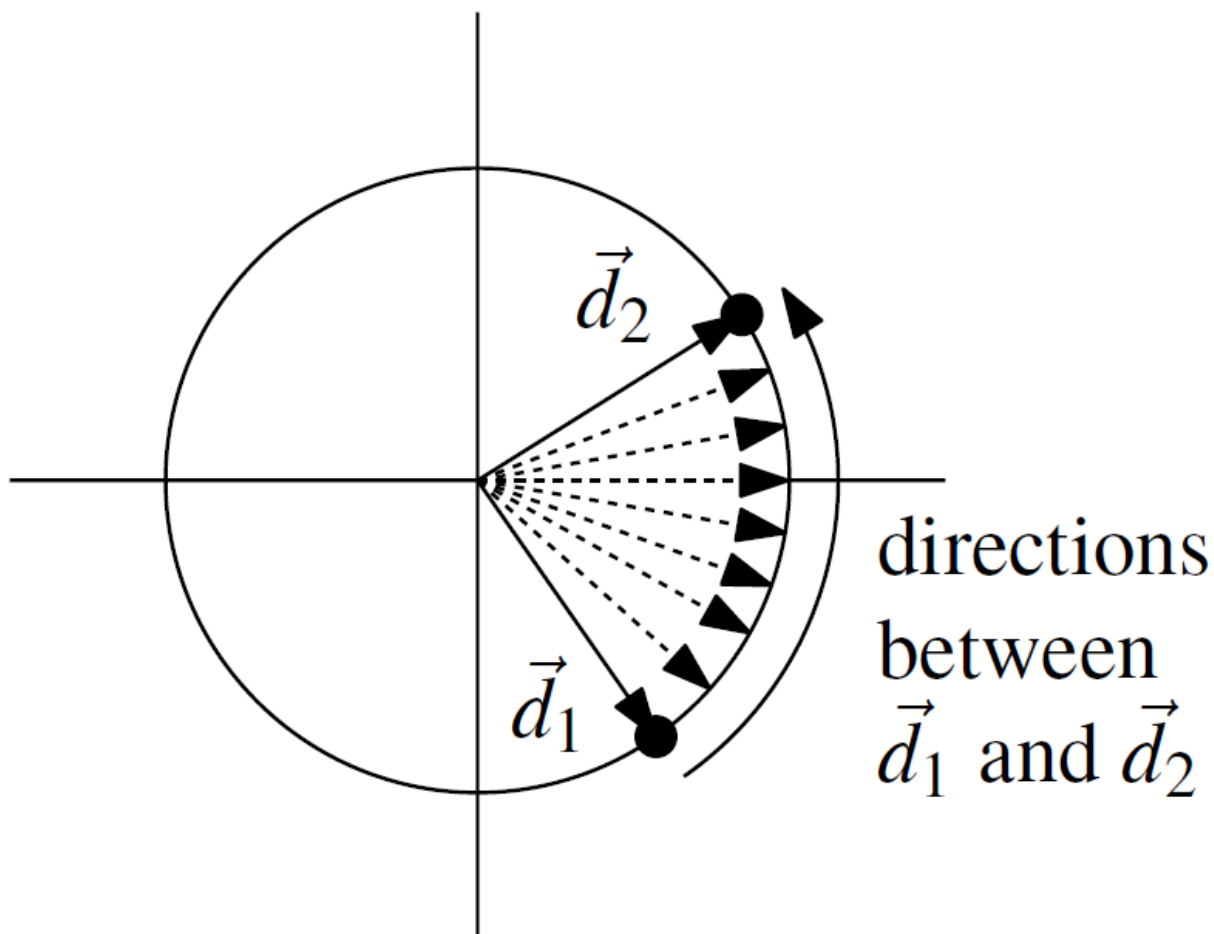
جمع‌های مینکوفسکی

در ادامه ما مجموعه جهت‌ها را با استفاده از یک دایره واحد به مرکز محور مختصات مدل می‌کنیم بطوریکه یک نقطه p روی دایره یک جهت را توسط برداری از مبدا تا p ارائه می‌دهد.

یک بازه از جهت $\vec{d}_1$ به جهت $\vec{d}_2$ به عنوان تمام جهت‌های مطابق با نقاط روی تکه دایره به صورت پادساعت‌گرد از نقطه نشان دهنده $\vec{d}_1$ به نقطه نشان دهنده $\vec{d}_2$ تعریف می‌شود.

در ضمن دقت شود که بازه $\vec{d}_1$ تا $\vec{d}_2$ با بازه $\vec{d}_2$ تا $\vec{d}_1$ یکسان نیست.

جمع‌های مینکوفسکی

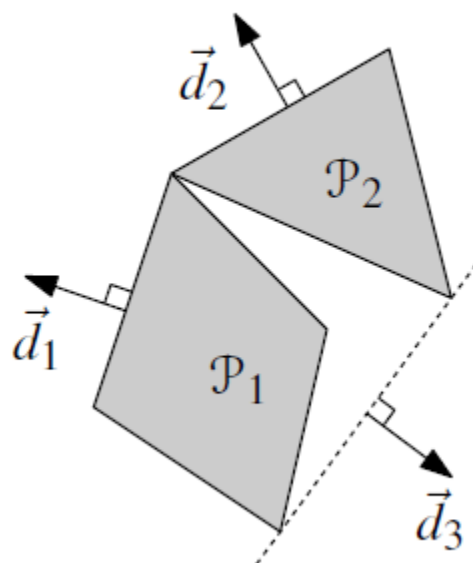


جمع‌های مینکوفسکی

مشاهده ۱۳.۷

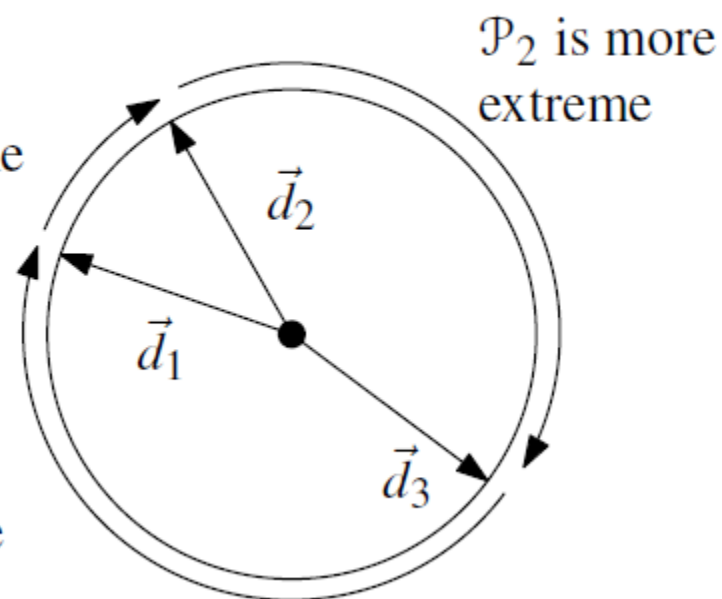
فرض کنید P_1 و P_2 چند ضلعی‌های محدب باشند به طوری که ناحیه داخلی آن‌ها بدون اشتراک باشد. فرض کنید $\vec{d}_1$ و $\vec{d}_2$ جهت‌هایی باشند که در آن‌ها P_1 دورتر از P_2 است، آنگاه یا در تمام جهت‌های بازه از $\vec{d}_1$ تا $\vec{d}_2$ یا در تمام جهت‌های بازه از $\vec{d}_2$ تا $\vec{d}_1$ ، P_1 دورتر از P_2 خواهد بود.

جمع‌های مینکوفسکی



$\mathcal{P}_1$ and $\mathcal{P}_2$ are
equally extreme

$\mathcal{P}_1$ is more
extreme



جمع‌های مینکوفسکی

قضیه ۱۳.۸

فرض کنید P_1 و P_2 دو چند ضلعی محدب باشند، به طوریکه نواحی داخلی آن‌ها مجزا می‌باشد، فرض کنید R چند ضلعی محدب دیگری باشد آنگاه جمع مینکوفسکی $P_1 \oplus R$ و $P_2 \oplus R$ شبه دیسک هستند.

جمع‌های مینکوفسکی

برهان:

تعریف می‌کنیم

$$CP_2 = P_2 \oplus R \text{ و } CP_1 = P_1 \oplus R$$

کافی است نشان دهیم

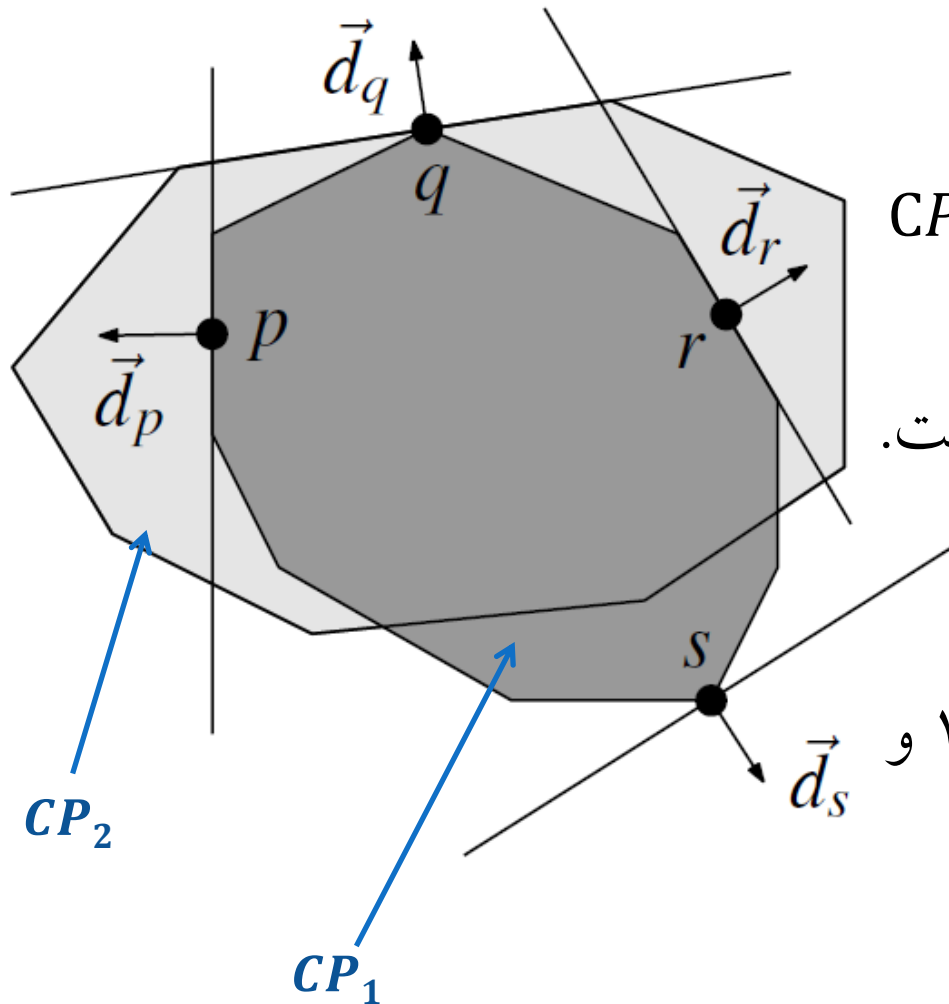
$$\partial CP_1 \cap \text{int}(\partial CP_2) \text{ متصل است.}$$

برای این امر از برهان خلف

استفاده نموده، فرض می‌کنیم

متصل نباشد و با مشاهده‌های ۱۳،۴ و

۱۳،۷ به تناقض می‌رسیم



جمع‌های مینکوفسکی

قضیه ۱۳.۹:

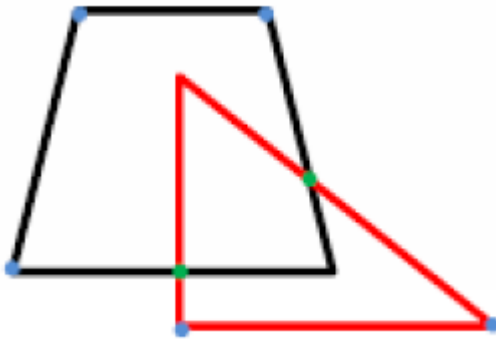
فرض کنید S یک مجموعه از شبه‌دیسک‌های چندضلعی محدب باشد که تعداد کل یال‌ها n هست، آنگاه پیچیدگی اجتماع آنها حداکثر $2n$ می‌باشد.

جمع‌های مینکوفسکی

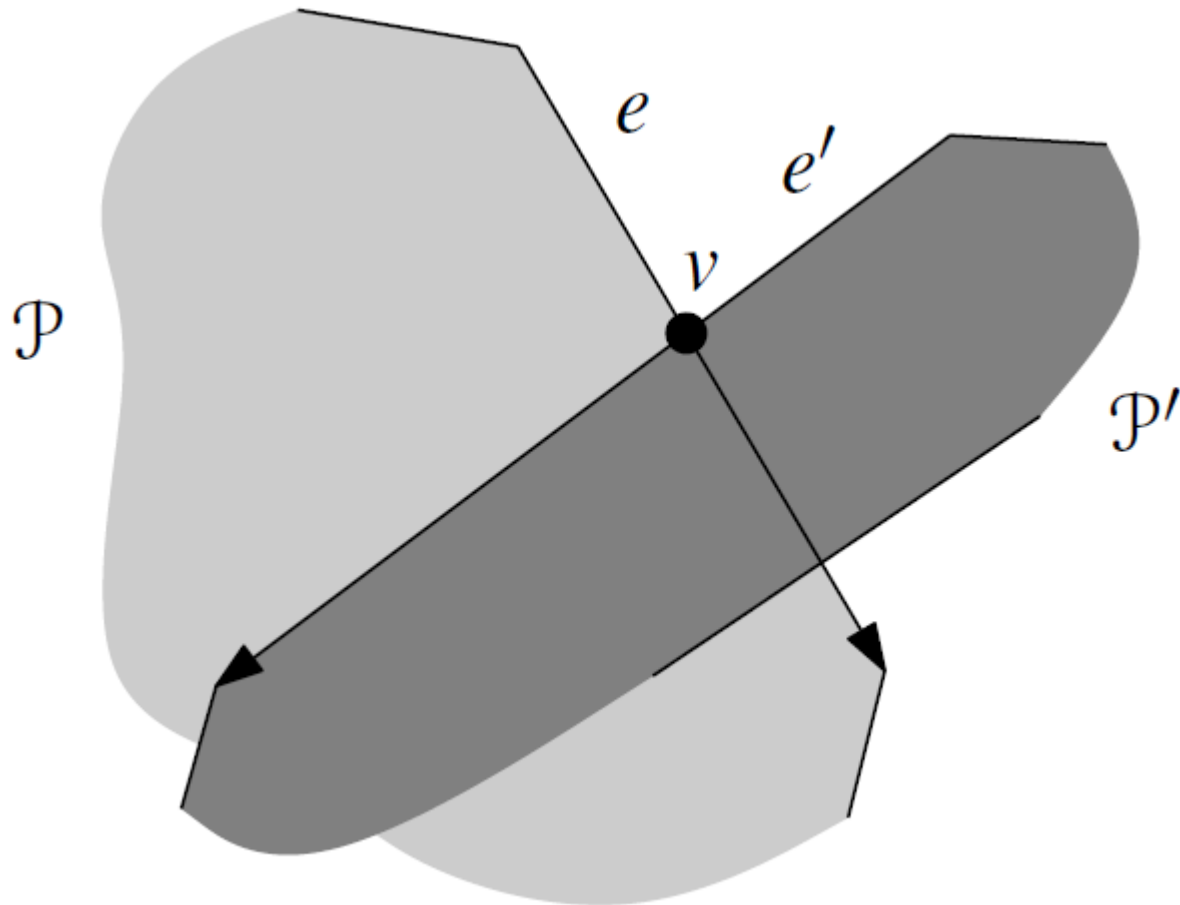
همان طور که در شکل روبرو دیده می شود رئوس اجتماع دو نوع است:

رئوس شبه دیسک (رئوس آبی رنگ)

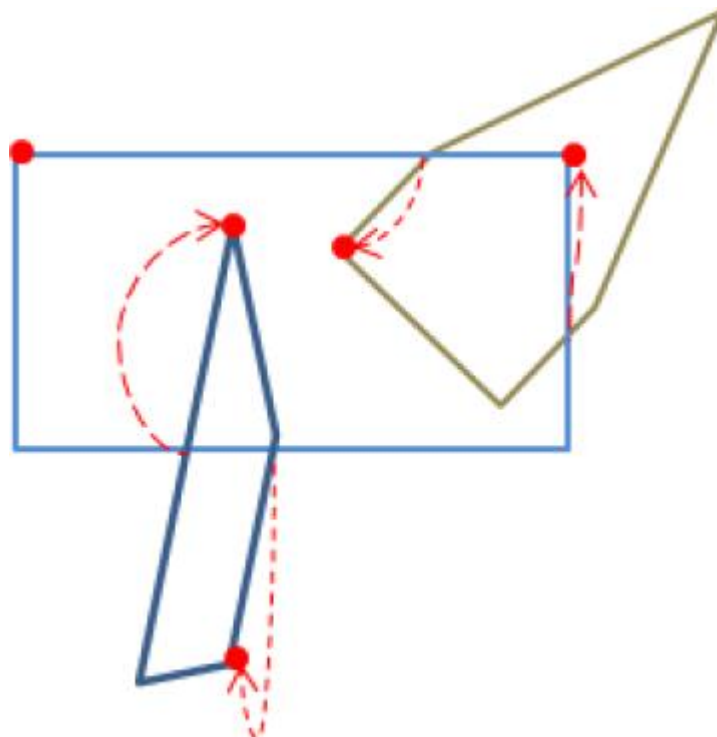
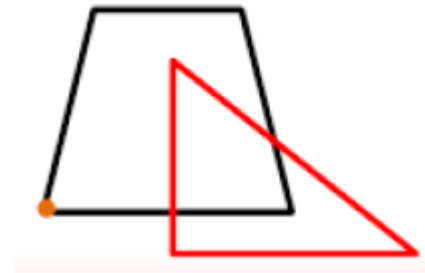
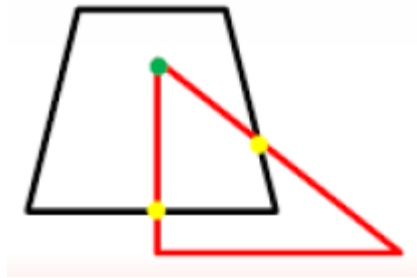
رئوس ناشی از اشتراک دو شبه دیسک



جمع‌های مینکوفسکی



جمع‌های مینکوفسکی



جمع‌های مینکوفسکی

اکنون الگوریتم‌هایی را جهت محاسبه مجموع مینکوفسکی ارائه می‌دهیم:

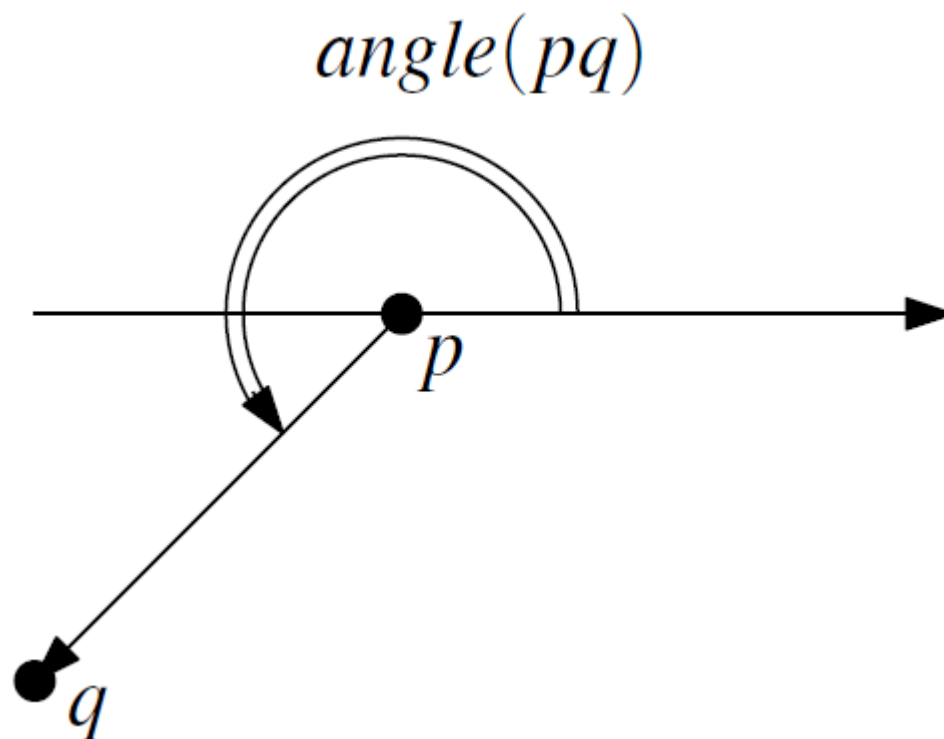
الگوریتم ۱:

برای هر جفت راس v, w ($v \in P$ & $w \in R$)، $v + w$ را محاسبه می‌کنیم.

در این گام غشای محدب تمام نقاط به دست آمده از گام ۱ را محاسبه می‌کنیم.

متأسفانه این الگوریتم بهینه نیست.

جمع‌های مینکوفسکی



جمع‌های مینکوفسکی

Algorithm MINKOWSKISUM($\mathcal{P}, \mathcal{R}$)

Input. A convex polygon $\mathcal{P}$ with vertices $v_1, \dots, v_n$, and a convex polygon $\mathcal{R}$ with vertices $w_1, \dots, w_m$. The lists of vertices are assumed to be in counter-clockwise order, with v_1 and w_1 being the vertices with smallest y -coordinate (and smallest x -coordinate in case of ties).

Output. The Minkowski sum $\mathcal{P} \oplus \mathcal{R}$.

1. $i \leftarrow 1; j \leftarrow 1$
2. $v_{n+1} \leftarrow v_1; v_{n+2} \leftarrow v_2; w_{m+1} \leftarrow w_1; w_{m+2} \leftarrow w_2$
3. **repeat**
4. Add $v_i + w_j$ as a vertex to $\mathcal{P} \oplus \mathcal{R}$.
5. **if** $\text{angle}(v_i v_{i+1}) < \text{angle}(w_j w_{j+1})$
6. **then** $i \leftarrow (i + 1)$
7. **else if** $\text{angle}(v_i v_{i+1}) > \text{angle}(w_j w_{j+1})$
8. **then** $j \leftarrow (j + 1)$
9. **else** $i \leftarrow (i + 1); j \leftarrow (j + 1)$
10. **until** $i = n + 1$ **and** $j = m + 1$

جمع‌های مینوکوفسکی

قضیه ۳,۱۰

جمع مینوکوفسکی دو چند ضلعی محدب به ترتیب با n و m راس، در زمان $O(m + n)$ محاسبه می شود.

در مطالبی که تا کنون بیان شد فرض کردیم چند ضلعی ها محدب هستند اکنون اگر یک یا هر دو چند ضلعی غیر محدب باشند چه اتفاقی می افتد؟!

جمع‌های مینکوفسکی

برای هر سه مجموعه ، S_1 و S_2 و S_3 خاصیت زیر را داریم:

$$S_1 \oplus (S_2 \cup S_3) = (S_1 \oplus S_2) \cup (S_1 \oplus S_3)$$

جمع‌های مینوکوفسکی

اکنون جمع مینوکوفسکی یک چند ضلعی غیر محدب P و یک چند ضلعی محدب R به ترتیب با n و m راس در نظر بگیرید. پیچیدگی $(P \oplus R)$ چیست؟

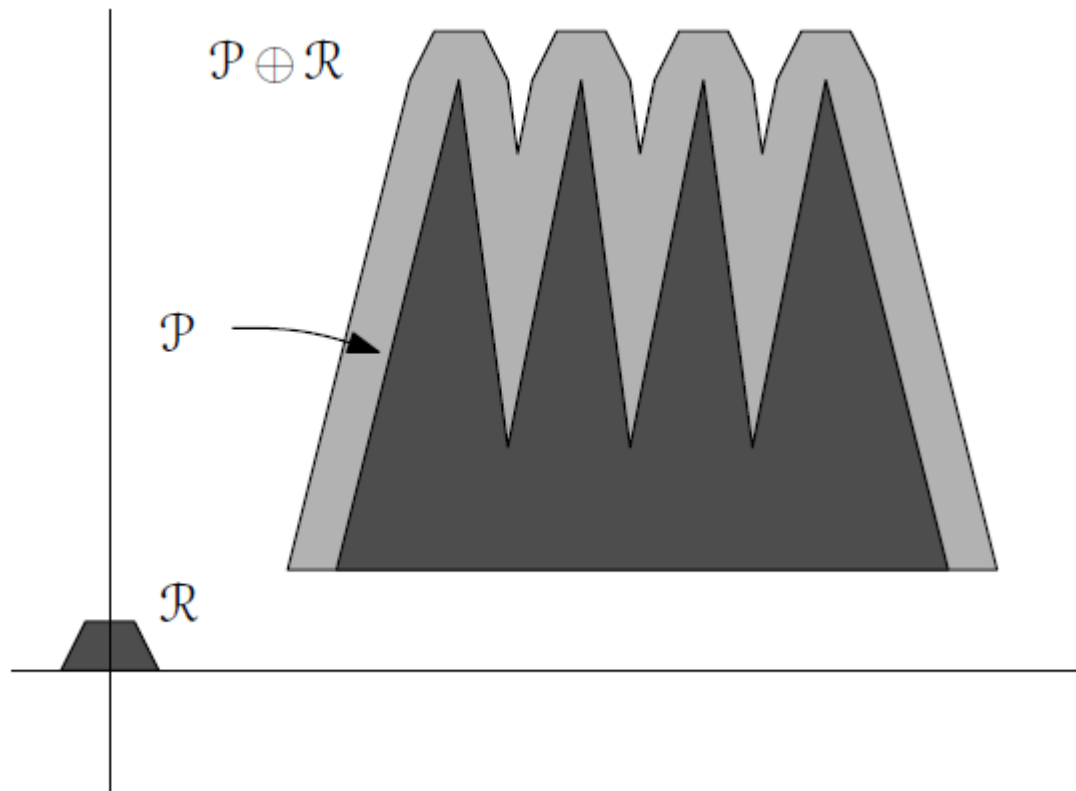
چند ضلعی غیر محدب P می‌تواند مثلث‌بندی شود که حاصل $n - 2$ مثلث $t_1, \dots, t_{n-2}$ خواهد بود.

اکنون با خاصیت جمع مینوکوفسکی گفته شده در اسلاید قبل رابطه زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$P \oplus R = \left(\bigcup_{i=1}^{n-2} t_i \right) \oplus R = \bigcup_{i=1}^{n-2} t_i \oplus R$$

جمع‌های مینکوفسکی

پیچیدگی $(P \oplus R)$ ، $O(mn)$ خواهد بود.



جمع‌های مینوکوفسکی

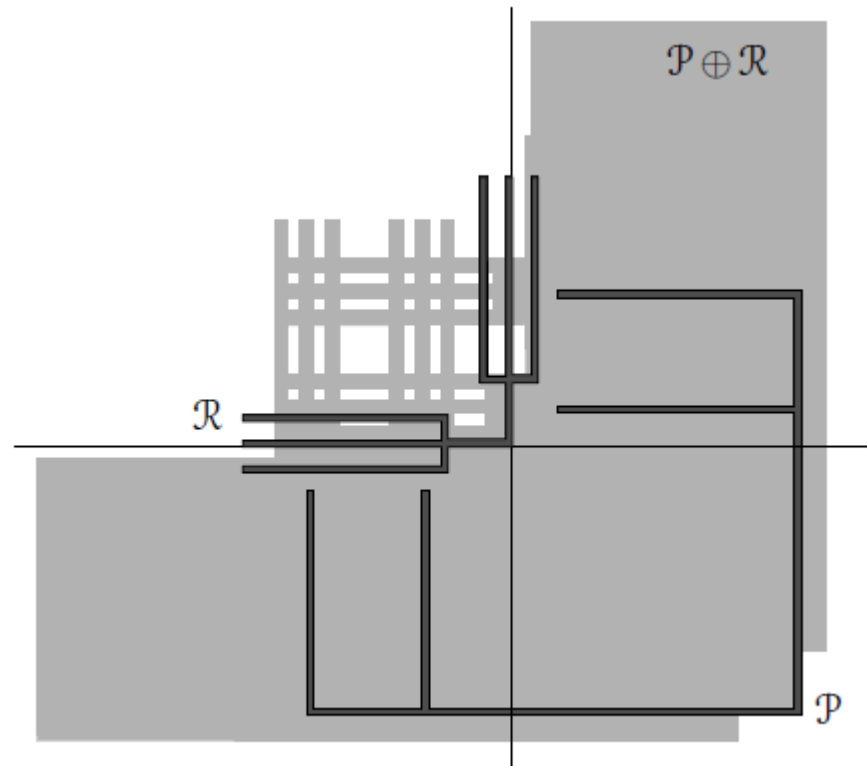
پیچیدگی مجموع مینوکوفسکی دو چند ضلعی غیر محدب P و R چیست؟

■ ابتدا باید هر دو را مثلث بندی کرده و سپس یک مجموعه از $n - 2$ مثلث t_i و یک مجموعه $m - 2$ از مثلث u_j خواهیم داشت.

■ جمع مینوکوفسکی P و R اجتماع جمع های مینوکوفسکی جفت های t_i و u_j می باشد

در نتیجه پیچیدگی $(P \oplus R)$ ، $O(n^2m^2)$ خواهد بود.

جمع‌های مینکوفسکی



جمع‌های مینکوفسکی

قضیه ۱۳.۱۱:

فرض کنید P و R چندضلعی‌های به ترتیب با n و m راس باشند، پیچیدگی جمع مینکوفسکی $(P \oplus R)$ به صورت زیر کران‌دار می‌شود:

۱. اگر هر دو چندضلعی محدب باشند، پیچیدگی $O(n + m)$ خواهد بود.

۲. اگر یکی محدب و دیگری غیر محدب باشد پیچیدگی $O(mn)$ خواهد بود.

۳. اگر هر دو غیر محدب باشند پیچیدگی $O(n^2m^2)$ خواهد بود.

۱۳,۳_ برنامه‌ریزی حرکت انتقالی

13.4 _ Translational Motion Planning

برنامه‌ریزی حرکت انتقالی

در قسمت قبل نشان دادیم $\mathcal{C}$ -obstacle متناظر با یک مانع P_i جمع مینکوفسکی $(P_i \oplus -R)$ آن است. علاوه بر این دیدیم که مجموع مینکوفسکی چند ضلعی‌های محدب شبه‌دیسک هستند.

حال باقی مانده با استفاده از $\mathcal{C}$ -obstacle ها $\mathcal{C}_{free}$ را محاسبه کنیم.

برنامه‌ریزی حرکت انتقالی

قضیه ۱۳.۱۲:

فرض کنید R یک ربات محدب با پیچیدگی ثابت باشد که در میان مجموعه S از موانع چندضلعی بدون اشتراک با n یال حرکت می‌کند. در اینصورت پیچیدگی فضای پیکربندی آزاد $C_{free}(R, S)$ برابر $O(n)$ خواهد بود.

اثبات

مثلاً بندی $P : O(n)$ تا مانع با نواحی داخلی مجزا هرکدام با پیچیدگی ثابت با استفاده قضیه ۱۳.۸ و ۱۳.۹ مجموعه‌ای از شبه‌دیسک‌ها داریم که به طور کل پیچیدگی خطی دارند. C_{free} مکمل اجتماع $C\text{-obstacle}$ هاست.

برنامه‌ریزی حرکت انتقالی

حال باقی می‌ماند الگوریتمی ارائه بدهیم که فضای پیکربندی آزاد ربات را بسازد.

ما باید فضای پیکربندی ممنوعه C_{forb} را بدست آوریم، چون فضای پیکربندی آزاد مکمل آن می‌باشد.

حال می‌خواهیم الگوریتمی برای محاسبه فضای پیکربندی ممنوعه ارائه بدهیم. قبل از آن فرض کنید $P_1, P_1, \dots, P_{n-1}$ نشان‌دهنده مثلث‌های موانع مثلث‌بندی شده باشد. می‌خواهیم:

$$C_{forb} = \bigcup_{i=1}^n CP_i = \bigcup_{i=1}^n P_i \oplus (-R(0,0))$$

را محاسبه می‌کنیم.

برنامه‌ریزی حرکت انتقالی

Algorithm FORBIDDENSPACE($\mathcal{CP}_1, \dots, \mathcal{CP}_n$)

Input. A collection of $\mathcal{C}$ -obstacles.

Output. The forbidden space $\mathcal{C}_{\text{forb}} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{CP}_i$.

1. **if** $n = 1$
2. **then return** $\mathcal{CP}_1$
3. **else** $\mathcal{C}_{\text{forb}}^1 \leftarrow \text{FORBIDDENSPACE}(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{\lceil n/2 \rceil})$
4. $\mathcal{C}_{\text{forb}}^2 \leftarrow \text{FORBIDDENSPACE}(\mathcal{P}_{\lceil n/2 \rceil + 1}, \dots, \mathcal{P}_n)$
5. Compute $\mathcal{C}_{\text{forb}} = \mathcal{C}_{\text{forb}}^1 \cup \mathcal{C}_{\text{forb}}^2$.
6. **return** $\mathcal{C}_{\text{forb}}$

برنامه‌ریزی حرکت انتقالی

قلب الگوریتم را خط ۵ آن تشکیل داده است. در این خط اجتماع دو ناحیه مسطح را محاسبه کرده است.

اگر ما نواحی را با استفاده DCEL ارایه دهیم می‌توانیم الگوریتم *Overlay* را بر روی آن اعمال کنیم.

برنامه‌ریزی حرکت انتقالی

قضیه ۱۳.۱۳

فضای پیکربندی آزاد C_{free} روبات محدب با پیچیدگی ثابت که در میان مجموعه‌ای از چندضلعی‌ها با n یال منتقل می‌شود را می‌توان در زمان

$$O(n \log^2 n)$$

محاسبه کرد.

- مثلث‌بندی : $O(n \log n)$ با توجه به پیچیدگی هر مانع m_i
- محاسبه **C-obstacle** ها : $O(n)$
- محاسبه فضای پیکربندی ممنوعه:

عمل ادغام در خط ۵: $O(n_1 + n_2 + k) \log(n_1 + n_2)$: n_1 و n_2 و k همگی $O(n)$ است. در نتیجه زمان اجرا : $O(n \log n)$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + O(n \log n)$$

$$O(n \log^2 n)$$

برنامه‌ریزی حرکت انتقالی

حال مساله برای یک ربات چندضلعی حل کردیم یعنی فضای خالی آن را محاسبه کردیم. حال می‌توانیم با استفاده از برنامه‌ریزی برای حرکت یک ربات نقطه‌ای مسئله را حل کنیم.

با توجه به این می‌توانیم حرکت یک ربات انتقالی چند ضلعی را با روند زیر برنامه‌ریزی کنیم:

- محاسبه فضای پیکربندی آزاد
- محاسبه نقشه دوزنقه‌ای از فضای آزاد و ساخت G_{road}
- نگاشت نقطه شروع و پایان از فضای کاری به فضای پیکربندی
- محاسبه مسیر بین نقطه شروع و نقطه پایان
- نگاشت مسیر بدست آمده از فضای پیکربندی به فضای کاری

برنامه‌ریزی حرکت انتقالی

قضیه ۱۳.۱۴

فرض کنید R یک ربات انتقالی محدب با پیچیدگی ثابت، که در میان مجموعه S از موانع چندضلعی جدا از هم با n یال باشد. می‌توانیم S را در زمان $O(n \log^2 n)$ پیش‌پردازش کنیم بطوریکه اگر بین هر موقعیت شروع و پایان، مسیر بدون برخوردی برای R وجود داشته باشد. آن را در زمان $O(n)$ محاسبه می‌کنیم.

با تشکر