

دانشگاه یزد
دانشکده علوم پایه

قالب گیری: یک مسأله
کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی

استاد:

آقای دکتر محمد فرشی

ارائه دهنده :

فاطمه دهقانی فیروز آبادی

*Linear Programming

Manufacturing with Modls

برنامه ریزی خطی _ قالب گیری

مراحل Casting برای اشیاء فلزی در صنعت:

دانشگاه یزد

دانشکده علوم پایه

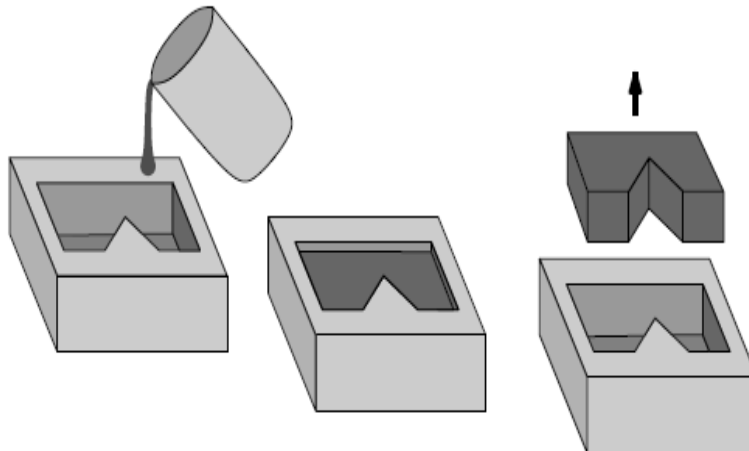
در مورد شکل قبل مراحل به این ترتیب است که ابتدا فلز مایع در قالب ریخته می شود و پس از اینکه مجدداً به حالت جامد تبدیل شد باید آن شی را از قالب خارج کنیم. اما باید توجه کرد که مرحله آخر همیشه به این آسانی که به نظر می آید نیست زیرا ممکن است که شی به قالب بچسبد و به عبارتی طوری در قالب قرار گرفته باشد که امکان خروج وجود ندارد در نتیجه مجبور به شکستن قالب خواهیم شد. اگر امکان خروج شی وجود نداشته باشد، گاهی اوقات می توان از یک قالب دیگر استفاده کرد اما برای همه اشیاء این کار امکانپذیر نیست. مثلاً برای ساخت کره قالب مناسبی وجود ندارد.

قالب گیری: یک مسأله کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی



مسئله :

برای یک قطعه داده شده آیا قالبی وجود دارد که بتوان قطعه را بدون شکستن قالب خارج کرد؟

قالب گیری: یک مسأله کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی

محدودیت های مسئله :

۱ اشیائی که باید ساخته شوند چند وجهی هستند .

۲ قالب ها باید یک قطعه باشند ، به عبارتی قالب ها نباید شامل دو قطعه یا بیشتر باشند.

۳ در انتها شی باید با یک انتقال از قالب خارج شود.

قطعه قابل قالب گیری :

قطعه ای بتوان قالبی با خصوصیات بالا برای آن طراحی کرد را قابل قالب گیری گویند.

برای تصمیم گیری در این مورد که یک شی می تواند با Casting ساخته شود باید یک قالب مناسب برایش پیدا کنیم .

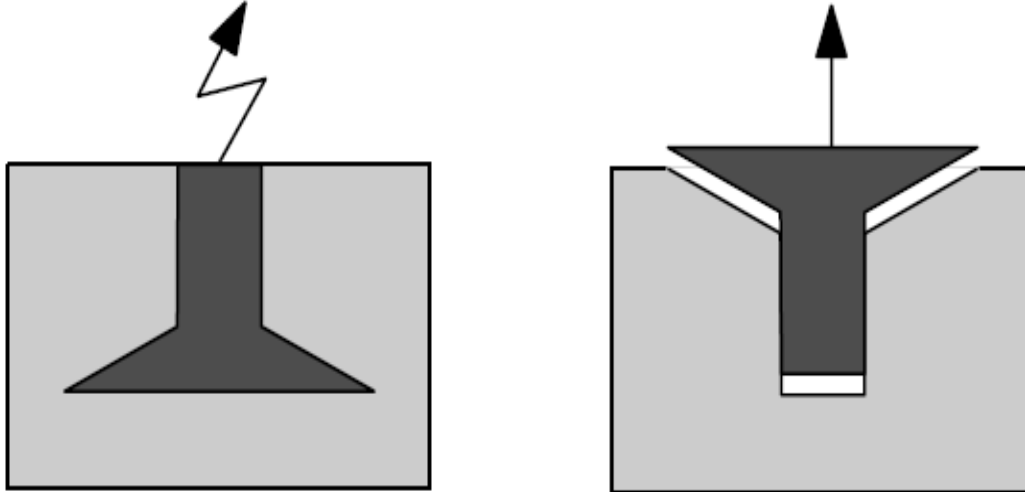
شکل حفره داخل قالب با توجه به شکل شی تعیین می شود و جهت های متفاوت از شی قالب های متفاوتی را ایجاد می کند.

انتخاب چگونگی قرارگیری شی در قالب می تواند مشکل باشد . زیرا در بعضی حالت ها خروج شی از قالب امکان پذیر نیست .

پس با توجه به اینکه کدام سطح شی را به عنوان سطح بالا در نظر بگیریم قالب های متفاوتی خواهیم داشت.

یک شی را castable گوئیم اگر بتواند حداقل از یکی از جهت ها از قالب خارج شود .

برای تصمیم گیری در مورد قابلیت Castability یک شی باید همه جهت ها را بررسی کنیم.

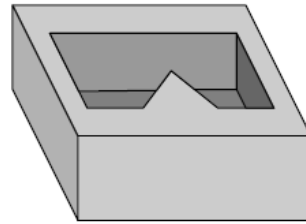


: Top facet



سطح بالایی شی است که باید یک سطح افقی (صاف) باشد و با سطوح قالب تماس نداشته باشد که در هنگام قرار گیری شی در قالب باید موازی با صفحه ی XY باشد .

top facet



دانشگاه یزد
دانشکده علوم پایه

قالب گیری: یک مسأله کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی

: Ordinary Facet (عادی)



سطحی از P که top facet نباشد.

متناظر با هر وجه عادی f یک سطح در قالب وجود دارد که با $\hat{f}$ نشان داده می

شود .

مهر ۹۳

برای خارج کردن قطعه از قالب باید یک جهت تعیین شود.

دانشگاه یزد

دانشکده علوم پایه

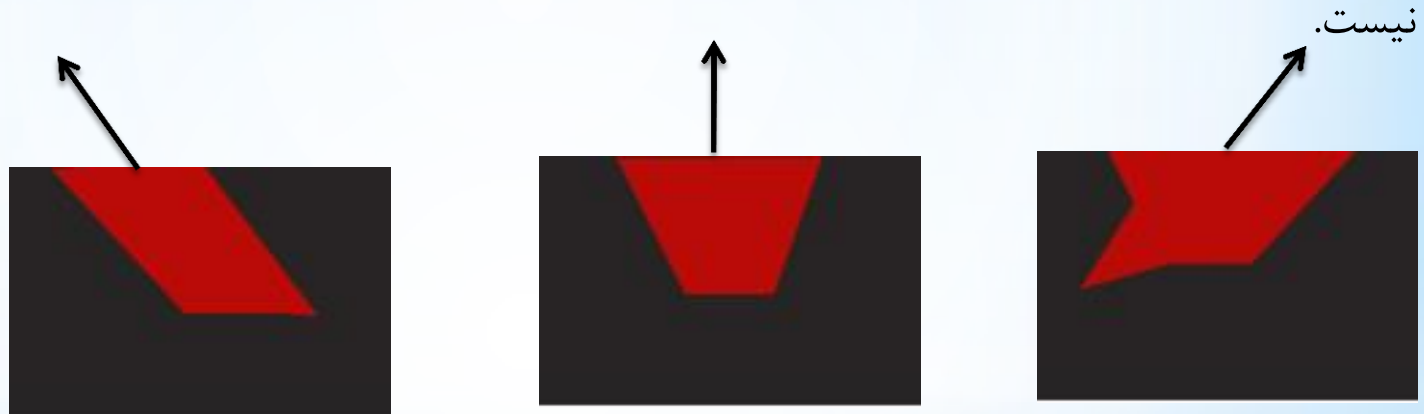
با توجه به این که وجهی از شیء که با قالب تماس ندارد (Top facet) در بالای قالب است، جهت انتخابی باید رو به بالا (یعنی در راستای محور Z صعودی) باشد اما این محدودیت یک شرط لازم است و به تنهایی برای داشتن یک جهت خروج معتبر کافی نیست.

قالب گیری: یک مسأله کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی



❖ برای تعیین زاویه بین دو بردار ابتدا آن دو بردار را طوری در نظر بگیریم

که مبدا آنها مبدا دستگاه مختصات باشد ، سپس این دو بردار در صفحه ی متناظرشان دو زاویه دارند که از بین آن دو باید زاویه کوچکتر را در نظر بگیریم.

مهر ۹۳

● فرض کنید که P یک چند وجهی سه بعدی باشد .

● فرض کنید f یک وجه عادی از شی باشد ، برای خارج کردن شی از قالب باید f از روی سطح از قالب بلند شود یا روی آن بلغزد .



قالب گیری: یک مسأله کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی

❖ $\vec{n}(f)$: بردار عمود بر سطح f و به سمت خارج .
❖ یک شرط لازم روی $\vec{d}$ این است که زاویه بین $\vec{d}$ و $\vec{n}(f)$ حداقل 90° باشد .

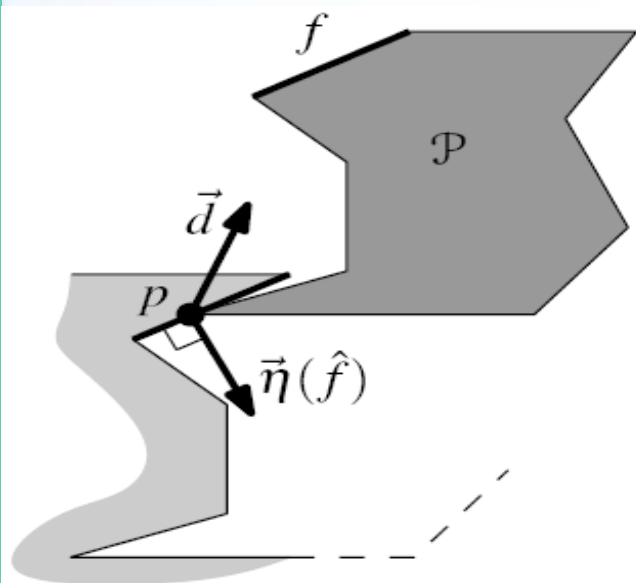
لم ۴.۱:

چند وجهی P به وسیله یک انتقال در جهت $\vec{d}$ میتواند از قالب خارج شود
اگر و تنها اگر یک زاویه بزرگتر از 90° با $\vec{n}(f)$ به ازای همه سطوح P بسازد.

اثبات:

رفت: اگر شی از قالب خارج شود
آنگاه d با بردار نرمال تمام وجه های عادی زاویه بزرگتر از 90° می سازد.

برگشت: اگر d با بردار نرمال تمام وجه های عادی زاویه بزرگتر از 90° بسازد
آنگاه شی از قالب خارج می شود.



دانشگاه یزد
دانشکده علوم پایه

قالب گیری: یک مسأله
کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی

مهر ۹۳

اثبات رفت:

❖ اگر $\vec{d}$ زاویه کمتر از 90° درجه با $\vec{n}(f)$ بسازد آنگاه زمانی که انتقال در جهت $\vec{d}$

باشد هر نقطه q در سطح f با قالب برخورد می کند .

اثبات برگشت :

فرض کنید وقتی که P در جهت d حرکت میکند با قالب برخورد کند ، باید نشان دهیم

که در این حالت d زاویه کمتر از 90° درجه با $\vec{n}(f)$ ساخته است . فرض شود p نقطه ای

از شی P باشد که با سطح $f^\wedge$ از قالب برخورد کرده است ، به این معناست که P تقریباً به

داخل قالب حرکت کرده ، پس $\vec{n}(f^\wedge)$ یک زاویه بیش از 90° درجه با $\vec{d}$ می سازد آنگاه $\vec{d}$

زاویه ای کمتر از 90° با $\vec{n}(f)$ خواهد ساخت .

نتیجه :

اگر P بتواند توسط دنباله ای از انتقال های کوچک از قالب خارج شود آنگاه میتوان آنرا توسط یک انتقال نیز خارج کرد .

پس مساله تبدیل به تعیین جهتی مانند d می شود

که با بردار نرمال خارجی تمام وجه ها عادی زاویه بزرگتر از 90° بسازد.

دانشگاه یزد

دانشکده علوم پایه

قالب گیری: یک مسأله کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی

مهر ۹۳

روند تبدیل مسئله فوق به یک مسئله هندسی :

دانشگاه یزد

دانشکده علوم پایه

هر جهت در فضای ۳ بعدی را می توان توسط یک بردار که از مبدا شروع می شود، نمایش داد. (رو به بالا یعنی دارای مولفه z مثبت)

❖ همچنین میتوان همه جهت ها را به عنوان نقاطی در صفحه $z=1$ در نظر گرفت .

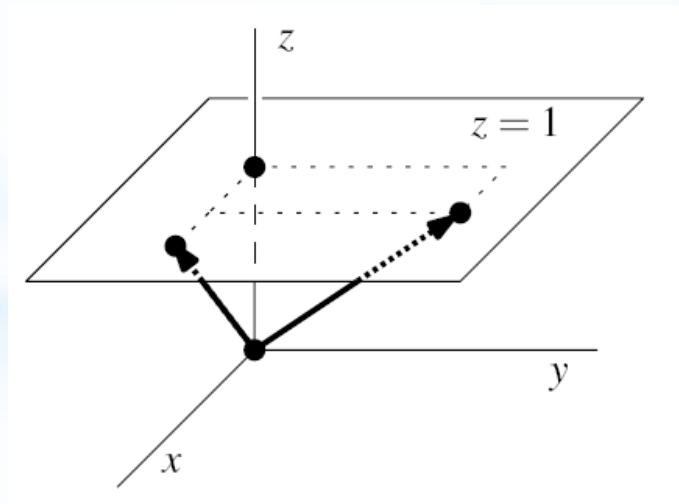
❖ نقطه $(x, y, 1)$ یک بردار جهت $(x, y, 1)$ را نشان میدهد .

قالب گیری: یک مسأله کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی



مهر ۹۳



فرض کنید $\vec{n} = (\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z)$ بردار خروجی از یک وجه عادی باشد .

بردار جهت $\vec{d} = (d_x, d_y, 1)$ یک زاویه حداقل ۹۰ درجه با بردار $\vec{n}$ می سازد

اگر و تنها اگر ضرب داخلی آنها مثبت نباشد.

بنابراین یک وجه عادی یک محدودیت به شکل زیر ایجاد می کند :

$$\vec{n}_x d_x + \vec{n}_y d_y + \vec{n}_z \leq 0$$

❖ نا معادله فوق برای صفحه های افقی که $\vec{n}_x = \vec{n}_y = 0$ درست نمی باشد

چون در این حالت داریم : $\vec{n}_z \leq 0$ اما بیان شد که باید مولفه Z مثبت باشد.

بنابراین هر وجه غیر افقی از چند وجهی P یک نیم صفحه روی صفحه $z=1$ تعریف میکند،

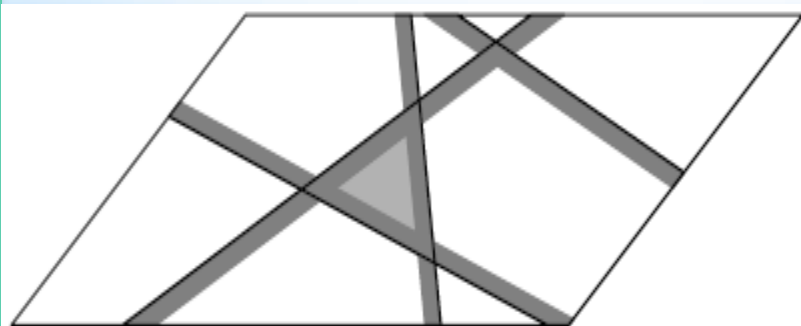
و هر نقطه در اشتراک این نیم صفحه ها مطابق با یک بردار جهت است که P می تواند در آن جهت از قالب خارج شود .

اشتراک نیم صفحه ها ممکن است تهی باشد که در این حالت نمی توان P را از قالب خارج کرد .

با توجه به توضیحات قبل مسئله اولیه به یک مسئله هندسی در صفحه تبدیل می شود .

مسئله هندسی :

یک مجموعه از نیم صفحه ها داده شده است و یک نقطه در اشتراک آنها را باید پیدا کنیم یا تشخیص دهیم که اشتراکشان تهی است .



قضیه ۴.۲ :

فرض کنید P یک شی با n وجه باشد، در زمان انتظار $O(n^2)$ و استفاده از $O(n)$ ذخیره سازی می توان تصمیم گرفت که P Castable است یا خیر .

❖ اثبات :

اگر چندوجهی داده شده n سطح داشته باشد

آنگاه مسئله هندسی بیش از $n-1$ نیم صفحه ندارد زیرا یک سطح به عنوان Top Facet در نظر گرفته می شود و به ازای هر وجه عادی یک نیم صفحه خواهیم داشت.

قالب گیری: یک مسأله
کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

فرض کنید $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ مجموعه ای از محدودیت ها خطی

با دو متغیر به شکل زیر باشد :

$$a_i x + b_i y \leq c_i$$

که a_i و b_i و c_i ثابت هایی هستند بطوریکه حداقل یکی از a_i یا b_i مخالف صفر باشند .

❖ مسئله پیدا کردن مجموعه همه نقاط $(x, y) \in R^2$ است که در همه n محدودیت به طور همزمان صدق کند یا به عبارتی نقاطی که میان نیم صفحه های مجموعه H مشترک باشد .
ویژگی ناحیه مشترک :

❖ یک نیم صفحه محدب است و اشتراک مجموعه های محدب نیز یک مجموعه محدب است، بنابراین اشتراک مجموعه ای از نیم صفحه ها یک ناحیه محدب در صفحه است .

❖ هر نقطه روی مرز ناحیه مشترک روی خط مرزی (کران) برخی نیم صفحه ها قرار دارد .

❖ خطوط مرزی ناحیه مشترک شامل خطوط مرزی نیم صفحه ها خواهند بود .

دانشگاه یزد

دانشکده علوم پایه

قالب گیری: یک مسأله کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

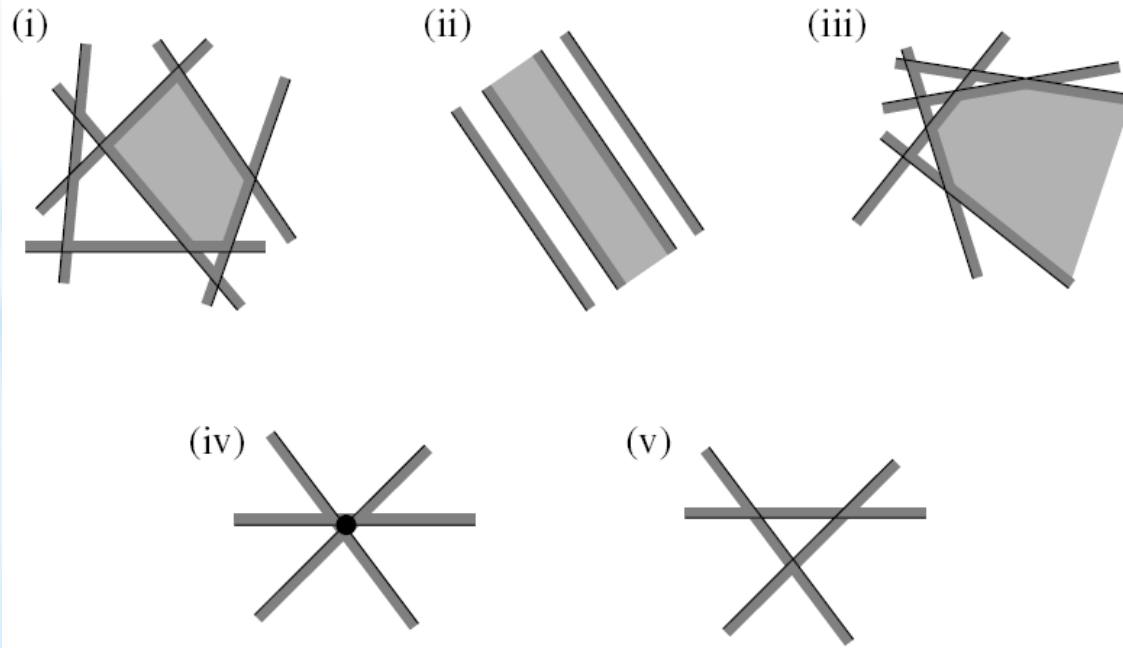
۴.۳ برنامه ریزی خطی

❖ از لحاظ هندسی یک محدودیت به عنوان یک نیم صفحه در R^2 است

که توسط خط $a_i x + b_i y = c_i$ کران دار می شود .

❖ بخش مشترک از n نیم صفحه ، یک چند ضلعی محدب است
که حداکثر توسط n یال کراندار می شود .

❖ ناحیه مشترک ممکن است یک نقطه باشد یا یک پاره خط یا تهی باشد .



دانشگاه یزد
دانشکده علوم پایه

قالب گیری: یک مسأله
کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی

Algorithm INTERSECTHALFPLANE(H)

Input. A set H of n half-planes in plane.

Output. The convex polygonal region $C := \cap h \in H$.

1. If $\text{card}(H) = 1$
2. Then $c \leftarrow$ the unique half-plane $h \in H$
3. Else Split H into sets H_1 and H_2 of size $\lfloor n/2 \rfloor$ and $\lfloor n/2 \rfloor$
4. $c_1 \leftarrow \text{INTERSECTHALFPLANE}(H_1)$
5. $c_2 \leftarrow \text{INTERSECTHALFPLANE}(H_2)$
6. $C \leftarrow \text{INTERSECTCONVEXREGIONS}(C_1, C_2)$

قالب گیری: یک مسأله
کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی

الگوریتم فوق برای محاسبه ناحیه اشتراک ابتدا مجموعه H را به دو مجموعه تقسیم میکند و به صورت بازگشتی برای محاسبه اشتراک دو مجموعه کوچک عمل می کند و سپس روال بیان شده در خط ششم برای محاسبه ناحیه اشتراک مربوط به دو ناحیه چندضلعی که هر کدام از اشتراک حداکثر $n/2+1$ نیم صحه به دست آمده اند، فراخوانی می شود.

برای پیاده سازی روال مربوط به خط ششم می توان از روش های مختلفی استفاده کرد که یکی از این روش ها استفاده از الگوریتم ارائه شده در فصل دوم است که برای محاسبه overlay دو نقشه بیان شد و برای محاسبه اشتراک چندضلعی ها نیز استفاده شد.

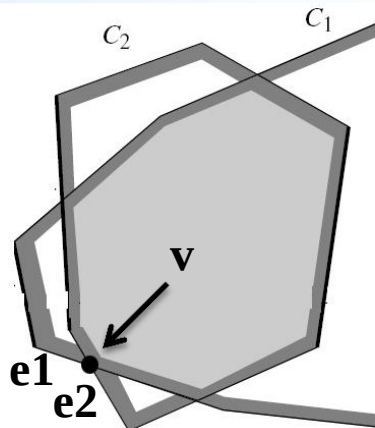
فرض کنید $P1$ یک چندضلعی با $n1$ راس و $P2$ یک چند ضلعی با $n2$ راس باشد
و $n=n1+n2$ آنگاه $P1 \cap P2$ و $P1 \setminus P2$ و $P2 \setminus P1$
در زمان $O(n \log n + k \log n)$ محاسبه می شود که k پیچیدگی خروجی است.

❖ در مورد بکارگیری نتیجه فوق برای مسئله مان باید به این نکته توجه کنیم
که ناحیه ها می توانند نامحدود باشند یا یک پاره خط و یا یک نقطه باشد.
به عبارتی این ناحیه ها الزاماً چند ضلعی نیستند.

6. $C \leftarrow \text{INTERSECTCONVEXREGIONS}(C1, C2)$

❖ فرض کنید که دو ناحیه $C1$ و $C2$ توسط بازگشت محاسبه شده اند

و چون هر دوی آنها توسط حداکثر $n/2 + 1$ نیم صفحه تعریف شده اند،
حداکثر $n/2 + 1$ یال دارند.



$$O(n \log n + k \log n) \longrightarrow O(n \log n)$$

زمان اجرای الگوریتم :

$$T(n) = \begin{cases} O(1), & \text{if } n = 1 \\ O(n \log n) + 2T(n/2), & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = O(n \log^2 n).$$

❖ Generalized master theorem

$$\begin{cases} T(1) = d \\ T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(f(n)) \end{cases}$$

$$\text{❖ } F(n) = O(n^{\lg b^a} \log n^k)$$

$$\text{❖ } T(n) = O(n^{\lg b^a} \log n^{k+1})$$

$T(n)$ تابعی غیر نزولی و $b \geq 2$ و $k \geq 0$
 a, b, c ثوابتی که $a > 0, c > 0, d \geq 0$

دانشگاه یزد

دانشکده علوم پایه

قالب گیری: یک مسأله
کاربردی

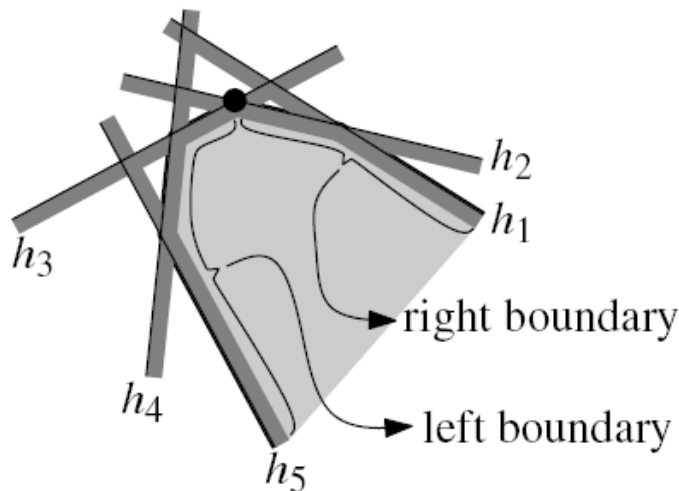
۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی

چگونگی نمایش یک چند ضلعی محدب C :

- ❖ مرزهای چپ و راست C را به طور جداگانه در دو لیست مرتب از نیم صفحه ها قرار می دهیم.
- ❖ از بالا به پایین خطوط مرزی C در لیست ها به ترتیب قرار می گیرد .
- ❖ رئوس به طور صریح ذخیره نمی شوند ، می توان آنها را توسط تقاطع های متوالی خطوط مرزی محاسبه کرد .
- ❖ فرض می کنیم چندضلعی ضلع افقی ندارد.



$$\mathcal{L}_{\text{left}}(C) =$$

لیست مرتب از خطوط مرزی چپ

$$\mathcal{L}_{\text{right}}(C) =$$

لیست مرتب از خطوط مرزی راست

$$\mathcal{L}_{\text{left}}(C) = h_3, h_4, h_5$$

$$\mathcal{L}_{\text{right}}(C) = h_2, h_1$$

الگوریتم کارا تر:

❖ مشابه الگوریتم Plane Sweep ارائه شده در فصل ۲ است .

❖ چون C_1 و C_2 محدب هستند حداکثر ۴ یال توسط Sweep Line قطع می شوند ،

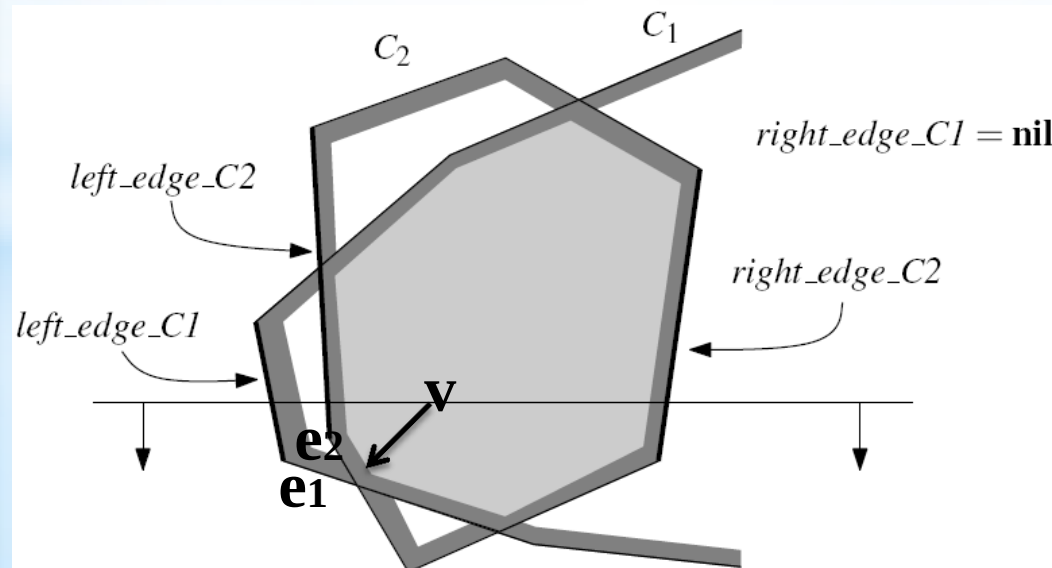
❖ بنابراین فقط کافی است که اشاره گرهایی به این ۴ یال داشته باشیم . که عبارتند از :

Right_edge_C1, Left_edge_C1

Right_edge_C2, Left_edge_C2

❖ اگر Sweep Line مرز چپ یا راست یک ناحیه را قطع نکند آنگاه اشاره گر منطبق با آن nil

می باشد .



دانشگاه یزد

دانشکده علوم پایه

قالب گیری: یک مسأله
کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی

مهر ۹۳

❖ فرض کنید y_1 مولفه y مربوط به بالاترین راس در C_1 باشد و

❖ اگر C_1 از بالا کراندار نبود $y_1 = \text{null}$

❖ و به طور مشابه y_2 برای C_2 تعریف می شود .

❖ برای یافتن ناحیه مشترک، الگوریتم باید روی بخشی از صفحه که $y \leq y_{\text{start}}$ اجرا شود.

$$y_{\text{start}} = \min(y_1, y_2)$$

قالب گیری: یک مسأله
کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی

یادآوری :

در الگوریتم ارائه شده در فصل ۲ به یک صف برای ذخیره کردن event point ها نیاز بود .

❖ در اینجا event ها نقاط شروع یا پایان یال های C_1 یا C_2 هستند که

با Sweep Line برخورد داشته اند . بنابراین event بعدی بالاترین نقطه از

بین نقاط پایین Sweep Line از یال هایی است که توسط Sweep Line

قطع شده اند . بنابراین به صف نیاز نیست .

در هر event جدید ضلع e خط l را قطع می کند.

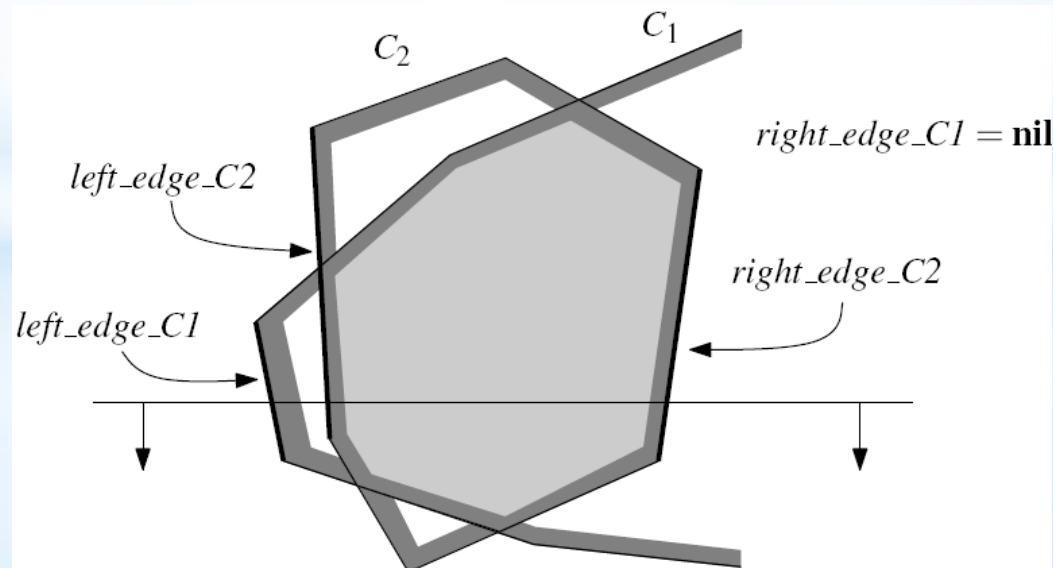
برای یال e ابتدا باید بررسی شود که متعلق به $C1$ است یا $C2$ و اینکه یک خط مرزی چپ است یا راست و سپس کارهای مربوطه انجام می شود.

فرض کنید e یال مرز چپ $C1$ باشد و p نقطه بالایی آن باشد بنابراین C یکی از ضلع های زیر را خواهد داشت:

✓ بین $left_edge_C2$ و $right_edge_C2$ است .

✓ یال هایی که نقطه ی بالای آنها $e \cap right_edge_C2$ است.

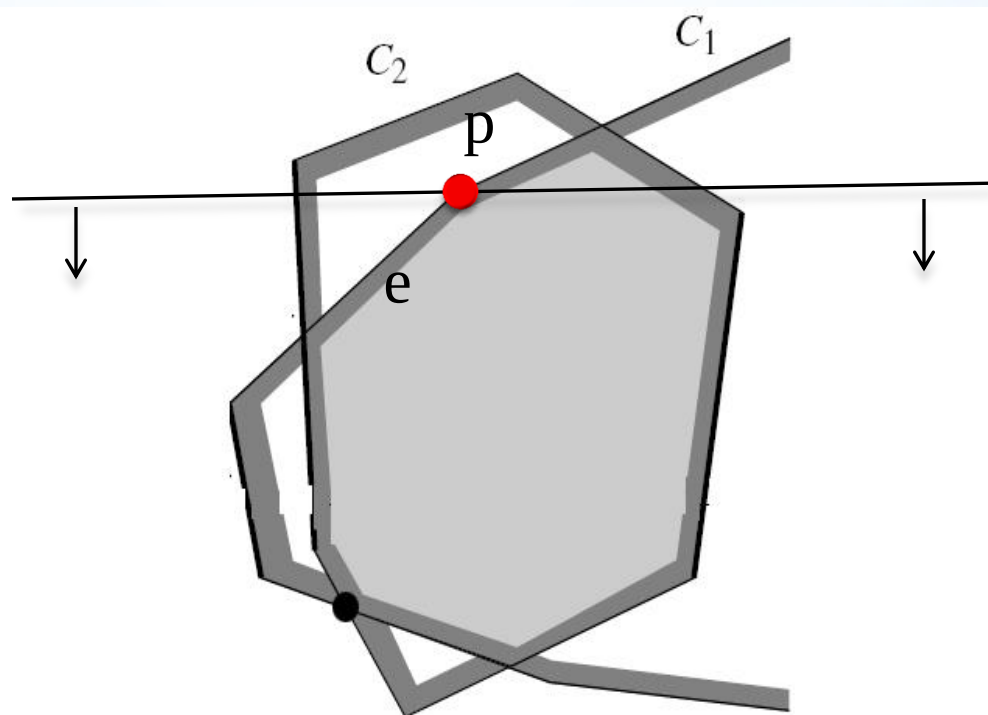
✓ یالی که نقطه ی بالای آن $e \cap left_edge_C2$ است.



✓ اگر p در بین $left_edge_C2$ و $right_edge_C2$ قرار داشته باشد :

e به عنوان یالی از C محسوب می شود و سپس

نیم صفحه ای که e خط کران آن است. $\leftarrow L_left(C)$



قالب گیری: یک مسأله
کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی

✓ اگر یال e با $right_edge_C2$ برخورد داشته باشد :

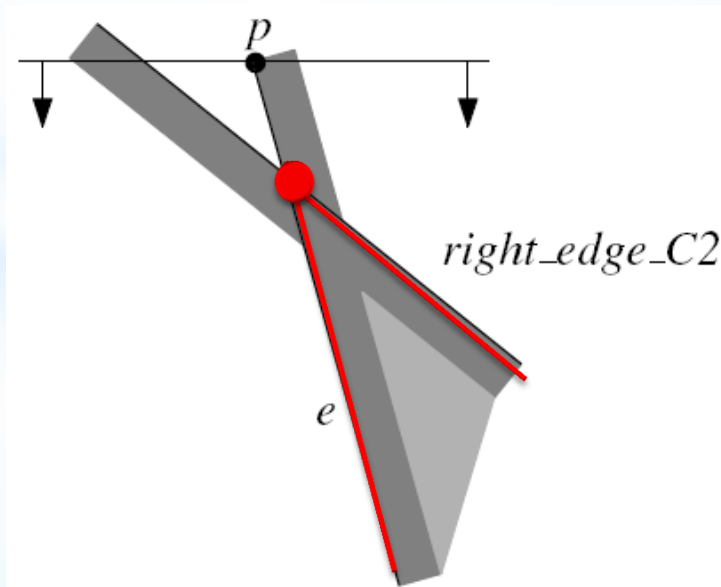
آنگاه نقطه برخورد یک راس از C می باشد و هر دو یال به عنوان یال هایی از C خواهند بود که دو حالت رخ می دهد:

(۱) یال ها از نقطه برخورد شروع شوند .

این اتفاق زمانی می افتد که P در سمت راست $right_edge_C2$ قرار داشته باشد .

نیم صفحه ی تعریف شده توسط e ← $left(C)$

نیم صفحه تعریف شده توسط $right_edge_C2$ ← $right(C)$



دانشگاه یزد
دانشکده علوم پایه

قالب گیری: یک مسأله
کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی

مهر ۹۳

(۲) هر دو یال به عنوان یالی از C خواهد بود که در نقطه برخورد پایان می یابند.
زمانی این اتفاق می افتد که p در سمت چپ $right_edge_C2$ قرار داشته باشد .
در این حالت کاری انجام نمی شود زیرا این یال ها قبلاً پیدا شده اند .

قالب گیری: یک مسأله
کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

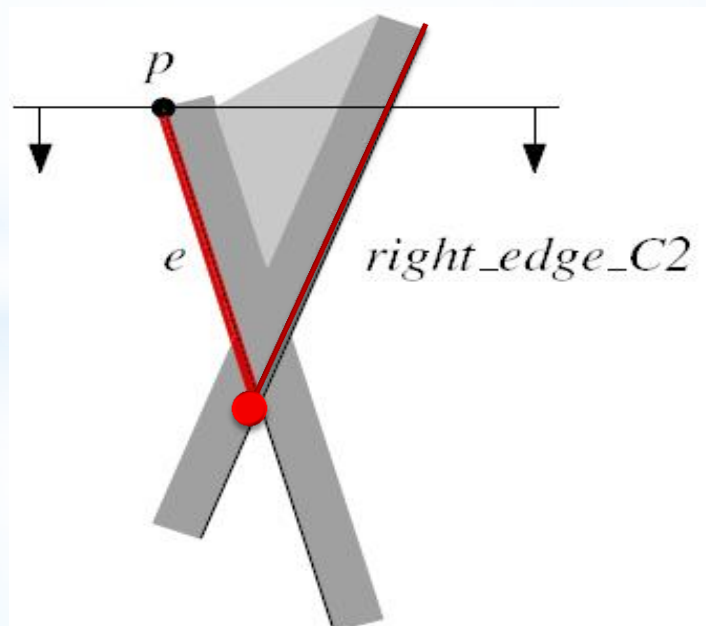
۴.۳ برنامه ریزی خطی

استاد:

آقای دکتر محمد فرشی

ارائه دهنده :

فاطمه دهقانی فیروزآبادی

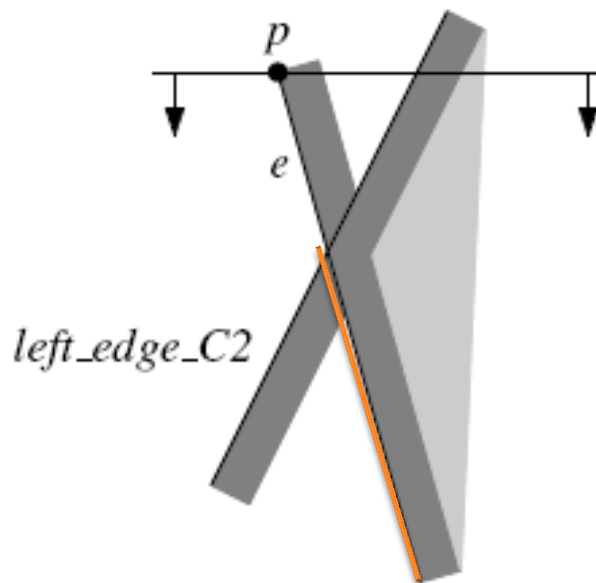


✓ اگر e با $left_edge_C2$ برخورد داشته باشد :

آنگاه نقطه برخورد راسی از C است که یال C با آن شروع می شود

p در سمت چپ $left_edge_C2$ قرار داشته باشد: بخشی از $e \leftarrow left(C)$

در غیر این صورت : بخشی از $left_edge_C2 \leftarrow left(C)$



آیا زمانی که باید دو نیم صفحه به L left یا L right اضافه شود ترتیب نیم صفحه ها درست است ؟

دانشگاه یزد
دانشکده علوم پایه

❖ یک یال از C را در نظر می گیریم، فرض کنید p نقطه ی بالای آن باشد

آنگاه p یا یک نقطه ی بالایی از یک یال در $C1$ یا $C2$ است

و یا به عنوان نقطه ی برخورد یال های e و e' از $C1$ و $C2$ است .

✓ در حالت اول : زمانی که به نقطه ی p می رسمیم یک یال از C پیدا می شود .

✓ حالت دوم : زمانی که به نقطه ی پایین تر از بین upperend points(e & e') برسیم یک

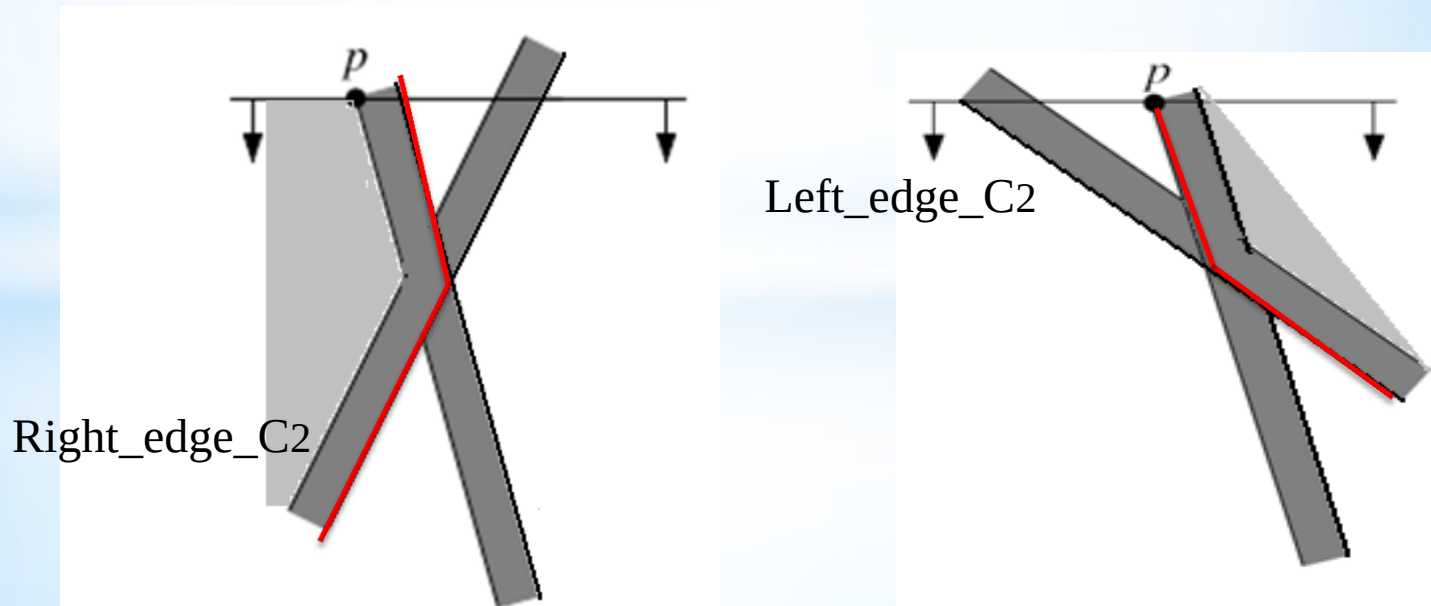
yal از C پیدا می شود .

قالب گیری: یک مسأله
کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی



مهر ۹۳

قضیه ۴.۳:

اشتراک دو چند ضلعی محدب در صفحه در زمان $O(n)$ محاسبه می شود .

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{if } n = 1 \\ O(n) + 2T(n/2) & \text{if } n > 1 \end{cases} \quad \text{زمان اجرای الگوریتم :}$$

قالب گیری: یک مسأله کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی

نتیجه ۴.۴ :

اشتراک یک مجموعه از نیم صفحه

در زمان $O(n \log n)$ و ذخیره سازی $O(n)$ محاسبه می شود .

۴.۳ برنامه ریزی خطی

اهداف :

تبدیل مساله قالب گیری به مساله برنامه ریزی خطی

حل مساله برنامه ریزی خطی با کمک روش های هندسه محاسباتی

ارایه یک الگوریتم تصادفی برای بهبود زمان حل مساله برنامه ریزی خطی

قالب گیری: یک مسأله کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی

تا به اینجا نشان دادیم که چگونه اشتراک نیم صفحه ها را بدست آوریم یا به عبارت دیگر محاسبه همه جواب های یک مجموعه از n محدودیت که زمان اجرای آن $O(n \log n)$ است .
در مسئله قالب گیری نیاز نیست که همه جواب های مجموعه محدودیت های خطی را به دست آوریم ، فقط یک جواب که یک نقطه در اشتراک نیم صفحه ها است ، کافی می باشد . پس می توان الگوریتم بهتری داشته باشیم .

در عمل پیدا کردن یک نقطه در اشتراک نیم صفحه ها کافی است .

دانشگاه یزد
دانشکده علوم پایه

مساله ی پیدا کردن یک جواب از یک مجموعه محدودیت های خطی ،

بهینه سازی خطی یا برنامه ریزی خطی نامیده می شود .

هدف پیدا کردن یک جواب خاص برای مجموعه محدودیت هاست که

یک تابع خطی از متغیرها ماکزیمم کند که این تابع ،

تابع هدف نامیده می شود .

قالب گیری: یک مسأله
کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی

که C_i ، a_{ij} و b_i اعداد حقیقی هستند و d بعد مسئله است .

$$\max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_dx_d$$

$$s.t. \quad a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,d}x_d \leq b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,d}x_d \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,d}x_d \leq b_n$$

تابع هدف

مهر ۹۳

✓ در مسئله مورد بحث ما $d=2$ یعنی مسئله دو بعدی است .

✓ اشتراک نیم صفحه ها مجموعه نقاطی است که در همه محدودیت ها صدق می کند

✓ که ناحیه feasible نامیده می شود و نقاط این ناحیه ، نقاط feasible نامیده می شود .

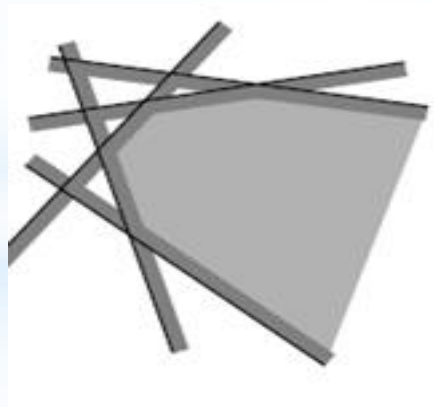
✓ نقاط خارج از ناحیه را نقاط infeasible گوئیم .

قالب گیری: یک مسأله
کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی



feasible



infeasible

• تابع هدف را می توان به عنوان یک بردار جهت در نظر گرفت.

• $\vec{f}$: تابع هدف تعریف شده توسط بردار C را نشان می دهد

• برای ماکزیمم کردن تابع هدف :

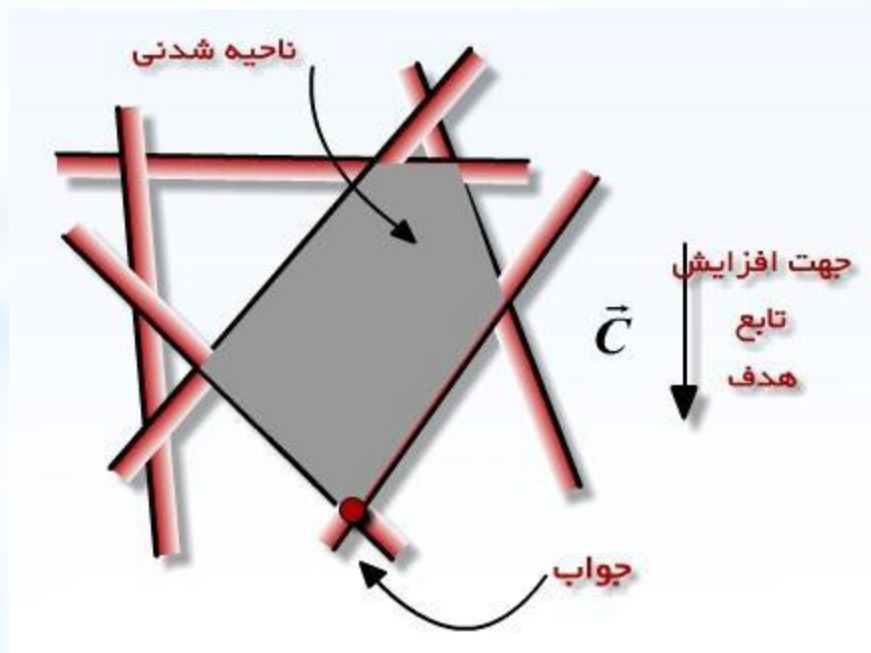
باید دورترین نقطه در جهت بردار C که در ناحیه feasible قرار دارد را پیدا کرد.

قالب گیری: یک مسأله
کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی



برای حل این مساله در تحقیق در عملیات مهم ترین روش که در عمل نیز بسیار مورد استفاده قرار می گیرد، روش سیمپلکس است.

مراحل کار :

● تعیین یک تابع هدف دلخواه

● حل مسئله خطی با توجه به آن تابع هدف و محدودیت ها

مجموعه Π محدودیت خطی در مسئله خطی دو متغیره را با $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ نشان می دهیم .

بردار $\vec{c} = (c_x, c_y)$ تابع هدف را تعریف می کند و $f_{\vec{c}}(p) = c_x p_x + c_y p_y$.

هدف پیدا کردن یک نقطه مانند $p \in \mathbb{R}^2$ است به $p \in \bigcap H$ و $f_{\vec{c}}(p)$ ماکزیمم باشد .

مسئله خطی را با $(H, \vec{c})$ ناحیه feasible را با C نشان می دهیم .

i. مسئله خطی غیر شدنی است که جوابی برای مجموعه محدودیت ها وجود ندارد .

ii. ناحیه شدنی بیکران است که در این مورد پرتوی ρ وجود دارد که کاملاً در ناحیه

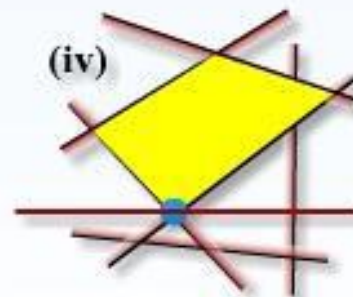
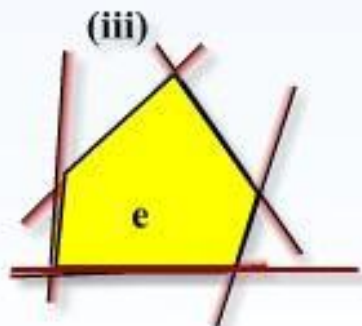
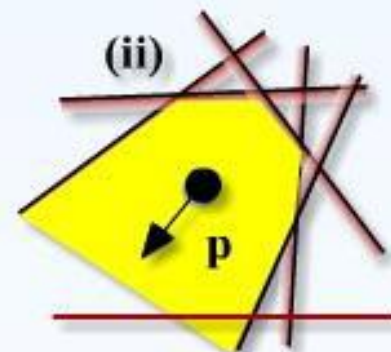
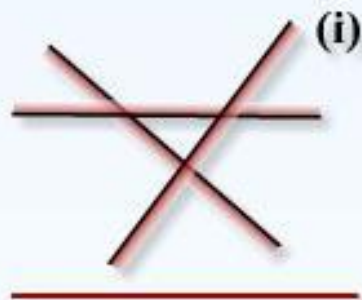
Feasible قرار دارد ، به طوریکه تابع هدف در جهت ρ ماکزیمم خواهد شد .

بنابراین در این مورد جوابی که مورد نظر است توصیف ρ می باشد .

iii. ناحیه feasible یک یال e دارد که جواب برای مسئله خطی وجود دارد اما یکتا نیست .

iv. اگر هیچ یک از سه حالت زیر رخ ندهد یک جواب یکتا وجود دارد که یک راس از C

می باشد .



ایده راه حل هندسی مساله استفاده از یک **الگوریتم افزایشی** است.

در هر مرحله یک محدودیت اضافه می شود و برای مساله جدید یک جواب بهینه بدست می آید. بنابراین نیاز است که جواب هریک از مسائل میانی خوب و یکتا باشد .

قالب گیری: یک مساله کاربردی

۴.۱ هندسه قالب گیری

۴.۲ اشتراک نیم صفحه ها

۴.۳ برنامه ریزی خطی

