

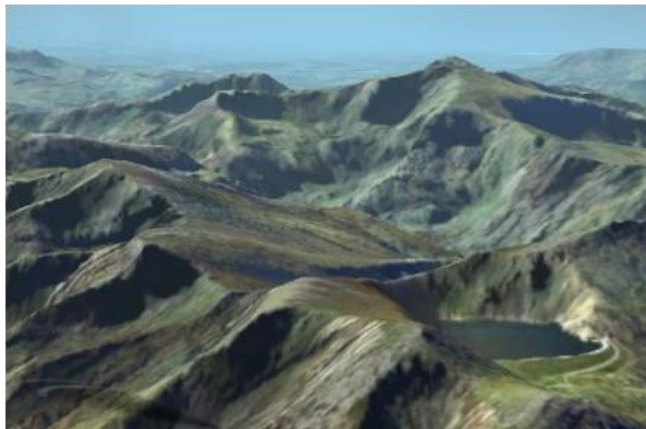


Delaunay Triangulations

محیا بهلولی
پاییز ۹۳

در فصل‌های قبلی نقشه‌های زمین را به طور ضمنی بدون برجستگی در نظر گرفتیم.

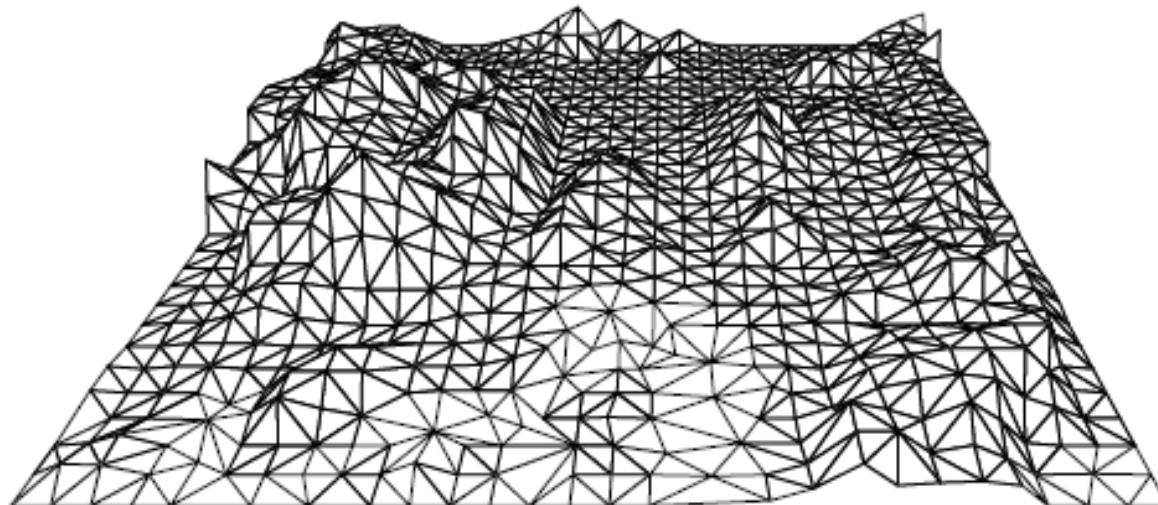
واقعیت این‌گونه نیست.



Terrain: یک سطح دوبعدی در فضای سه بعدی با یک ویژگی خاص؛ اگر خط عمودی با آن برخورد داشته باشد، این برخورد تنها در یک نقطه است.
گرافی از یک تابع به شکل زیر است:

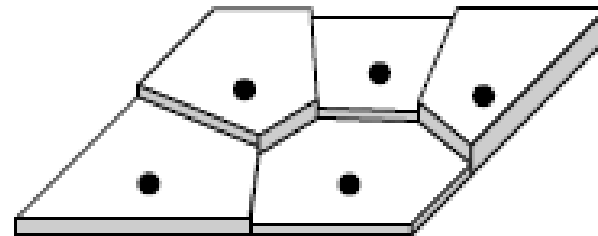
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$f(p)$ مقدار ارتفاع در نقطه‌ی p در دامنه‌ی A را مشخص می‌کند.

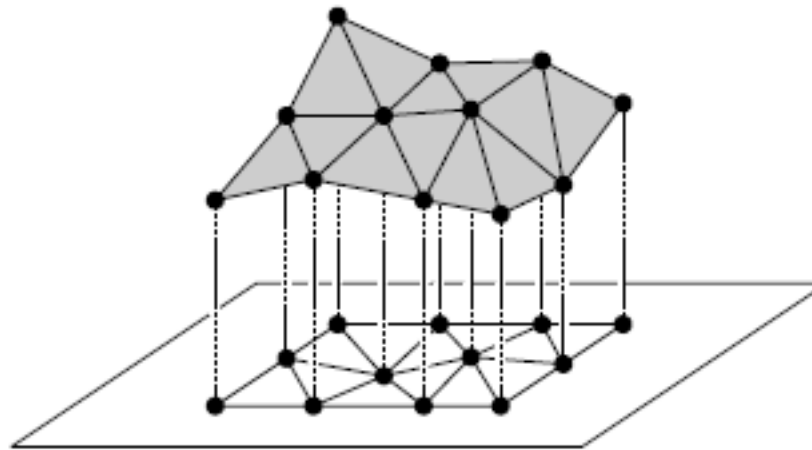


ارتفاع همه نقاط دامنه terrain را نمی‌دانیم، فقط در مجموعه نقاط P مشخص است.
در واقع مقدار تابع f در یک مجموعه‌ی متناهی P را می‌دانیم.

هدف: تخمین terrain
یک راه ساده: به هر $p \in A$ ارتفاع نزدیک‌ترین نقطه نمونه را نسبت می‌دهیم.



یک مثلث‌بندی از P تعیین می‌کنیم.
یک subdivision مسطح با وجه‌های مثلثی که رئوس آن‌ها نقاط P هستند.
فرض می‌کنیم نقاط نمونه طوری هستند که می‌توانیم با مثلث‌ها دامنه terrain را پوشش دهیم.
نقاط نمونه را تا ارتفاع آن‌ها بالا می‌بریم.
هر مثلث در مثلث‌بندی را به یک مثلث در فضای سه بعدی نگاشت می‌کنیم.

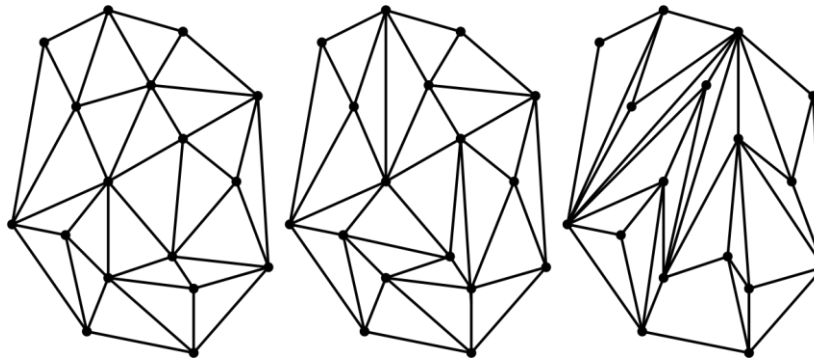


یک terrain چند وجهی

نقاط نمونه را چگونه مثلث بندی کنیم؟

کدام مثلث بندی تخمین بهتری از terrain می دهد.

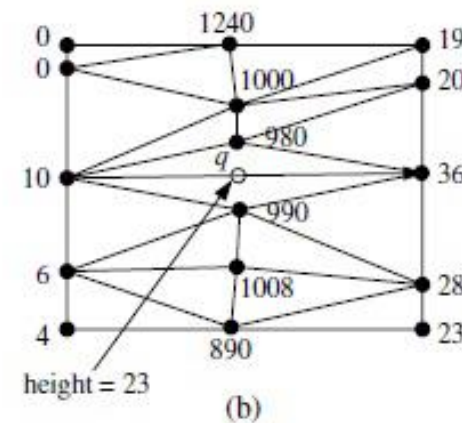
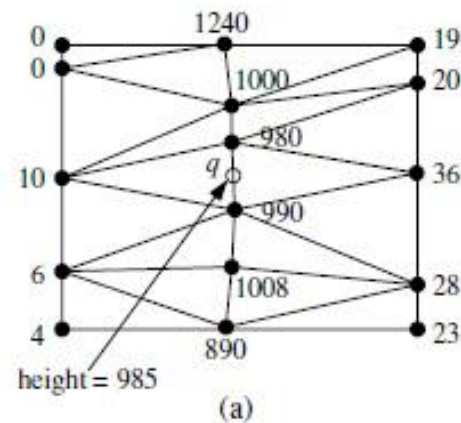
به غیر از ارتفاع برخی از نقاط اطلاعات دیگری نداریم، همه ی مثلث بندی به نظر خوب می رسند.



برخی از مثلث‌بندی‌ها به واقعیت نزدیک‌ترند.

باید یک معیار برای تشخیص این که کدام مثلث‌بندی بهتر است، داشته باشیم.

به نظر می‌رسد یک مثلث‌بندی با زاویه‌های کوچک، مناسب نباشد.



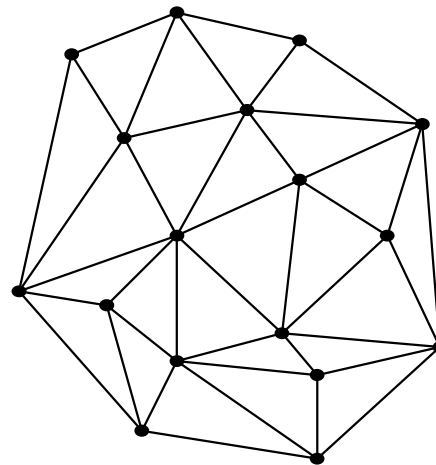
مثلث‌بندی‌ها را بر اساس کوچک‌ترین زاویه‌شان رتبه‌بندی می‌کنیم.
اگر کوچک‌ترین زاویه دو مثلث‌بندی یکسان باشد، آن‌گاه دومین کوچک‌ترین زاویه را در نظر می‌گیریم و به همین ترتیب...

تعداد محدودی مثلث‌بندی مختلف از نقاط P وجود دارد، از این رو یک مثلث‌بندی بهینه وجود دارد.

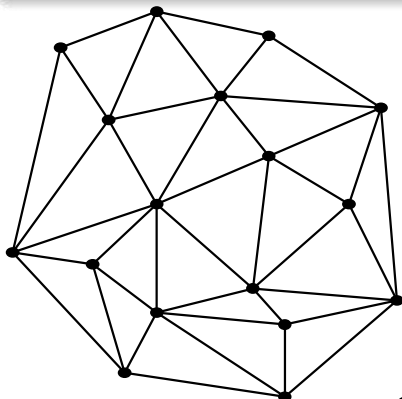
هدف :

پیدا کردن مثلث‌بندی با این ویژگی که کوچک‌ترین زاویه‌اش از کوچک‌ترین زاویه‌ی همه‌ی مثلث‌بندی‌ها بزرگ‌تر باشد.

فرض کنید $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ مجموعه‌ای از نقاط در صفحه باشند.
زیر تقسیم مسطح maximal: زیر تقسیم S ، طوری که اضافه کردن هر یال به S خاصیت مسطح بودن آن را از بین ببرد.
هر پاره خط که دو نقطه‌ی متوالی روی مرز غشای محدب P را به هم وصل می‌کند یک یال از مثلث‌بندی T است.



تعداد مثلث‌ها و یال‌ها در همه‌ی مثلث‌بندی‌های P مقدار ثابتی است.
 قضیه ۹،۱: فرض کنید P مجموعه‌ای از نقاط در صفحه باشد که در یک خط قرار نگرفته‌اند. k تعداد نقاطی باشد که روی مرز convex hull این مجموعه نقاط قرار دارند. برای هر مثلث‌بندی $2n-2-k$ مثلث و $3n-3-k$ یال خواهد داشت.



اثبات: فرض کنید T یک مثلث‌بندی از P و m تعداد مثلث‌های T باشد.

تعداد وجه‌های مثلث‌بندی، $m+1$

هر مثلث ۳ یال دارد

وجه نامحدود k تا یال دارد.

هر یال دقیقاً با دو وجه در ارتباط است. بنابراین تعداد کل یال‌های T : $n_e := (3m + k)/2$

فرمول اویلر: $n - n_e + n_f = 2 \leftarrow m = 2n - 2 - k$ و $n_e = 3n - 3 - k$

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m})$ توالی زاویه‌های m مثلث مثلث‌بندی T از مجموعه‌ی P است.

به طوری که: $\alpha_i \leq \alpha_j$ برای $i < j$.

α_1 کوچک‌ترین زاویه T است.

$A(T) := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3m})$ را بردار زاویه T می‌نامیم.

$A(T') := (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{3m})$ را بردار زاویه T' می‌نامیم.

بردار زاویه T از بردار زاویه T' بزرگ‌تر است اگر و تنها اگر $A(T)$ به ترتیب لغت‌نامه‌ای از $A(T')$ بزرگ‌تر باشد.

اگر یک اندیس i , $1 \leq i \leq 3m$ وجود داشته باشد به طوری که:

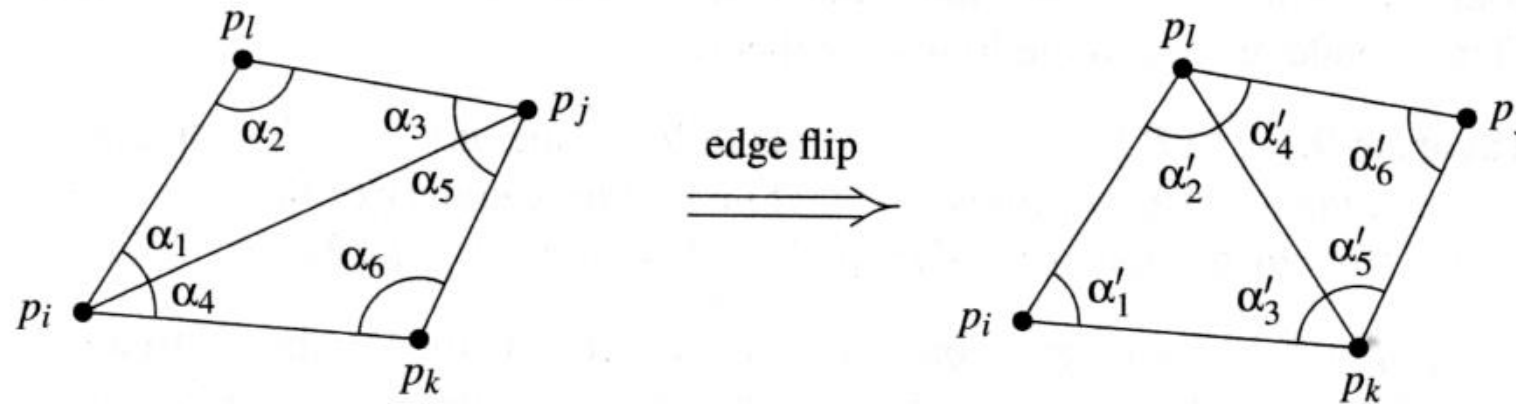
$$\alpha_j = \alpha'_j \text{ for all } j < i \text{ and } \alpha_i > \alpha'_i$$

اگر برای همه‌ی مثلث‌بندی‌های T' از P داشته باشیم $A(T) \geq A(T')$ ، آن‌گاه مثلث‌بندی T بهینه زاویه‌ای نامیده می‌شود.

بهترین مثلث‌بندی، مثلث‌بندی است که بزرگ‌ترین بردار زاویه را داشته باشد یعنی بهینه زاویه‌ای باشد.

دو مثلث مجاور در T را در نظر بگیرید:

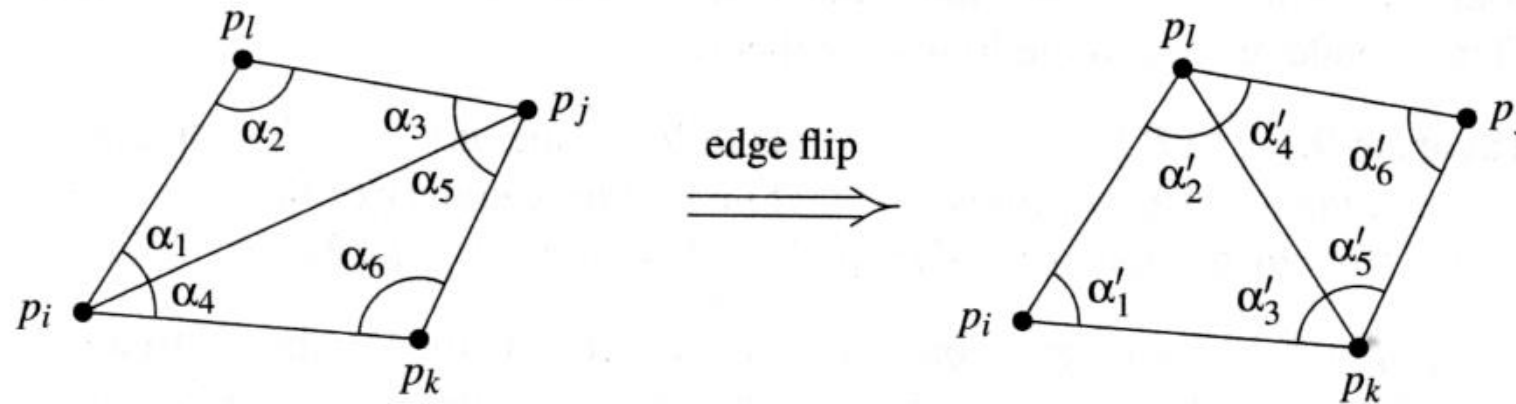
- اگر دو مثلث یک چندضلعی محدب را تشکیل دهند، می‌توانیم با یک *edge flip* روی یال مشترک آنها یک مثلث‌بندی دیگر داشته باشیم.



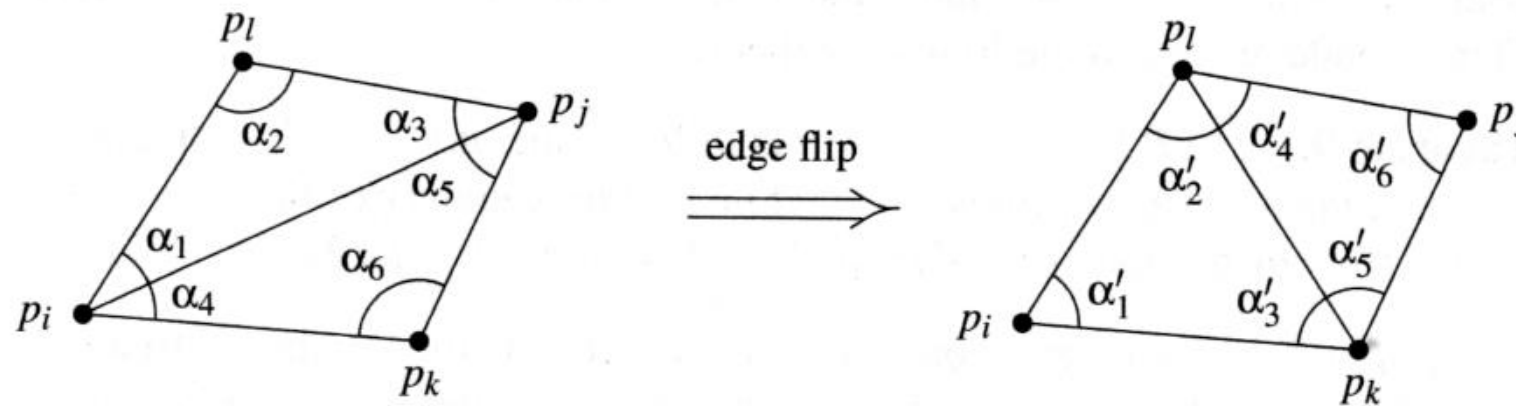
یک یال غیر مجاز است اگر:

$$\min \alpha_i < \min \alpha'_i \\ 1 \leq i \leq 6$$

به عبارت دیگر، یک یال غیر مجاز است اگر با *flip* کردن آن یال اندازه‌ی کوچک‌ترین زاویه افزایش یابد.



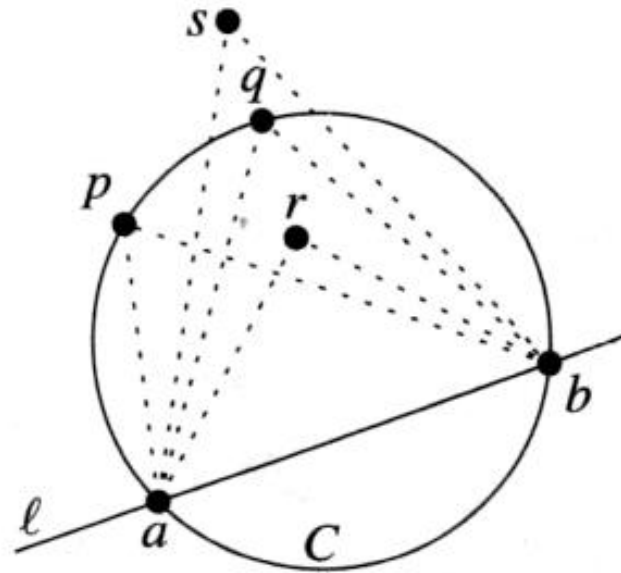
مشاهده ۹،۳: فرض کنید T مثلث‌بندی با یال غیرمجاز e باشد و T' مثلث‌بندی به دست آمده از T بعد از $flip$ کردن یال e باشد. آن گاه $A(T) < A(T')$



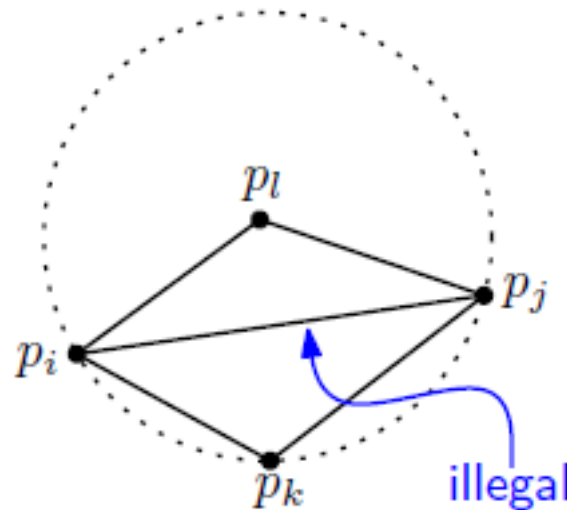
قضیه تالس:

فرض کنید C یک دایره باشد، l خطی که با دایره در نقاط a, b برخورد می‌کند و p, q, r, s نقاطی هستند که در یک سمت خط l واقع شده‌اند، در این صورت:

$$\angle arb > \angle apb = \angle aqb > \angle asb.$$



لم ۹,۴: فرض کنید یال $\overline{p_i p_j}$ همجوار با مثلث‌های $p_i p_j p_l$ و $p_i p_j p_k$ و دایره‌ی C محاط بر p_i, p_j و p_k باشد. یال $\overline{p_i p_j}$ غیرمجاز است اگر و فقط اگر p_l داخل C قرار بگیرد. علاوه بر این، اگر نقاط p_i, p_j, p_l و p_k تشکیل یک چهارگوش convex دهند و روی یک دایره‌ی مشترک قرار نگیرند آن‌گاه دقیقاً یکی از یال‌های $\overline{p_i p_j}$ یا $\overline{p_k p_l}$ یک یال غیرمجاز است.



مثلث‌بندی مجاز: مثلث‌بندی که هیچ یال غیرمجازی نداشته باشد.

از مشاهده ۹,۳ نتیجه می‌شود هر مثلث‌بندی بهینه‌زاویه‌ای یک مثلث‌بندی مجاز است.

محاسبه‌ی یک مثلث‌بندی مجاز:

یک مثلث‌بندی اولیه به دست می‌آوریم، تمام یال‌های غیر مجاز آن را *flip* می‌کنیم تا همه‌ی یال‌ها مجاز شوند.

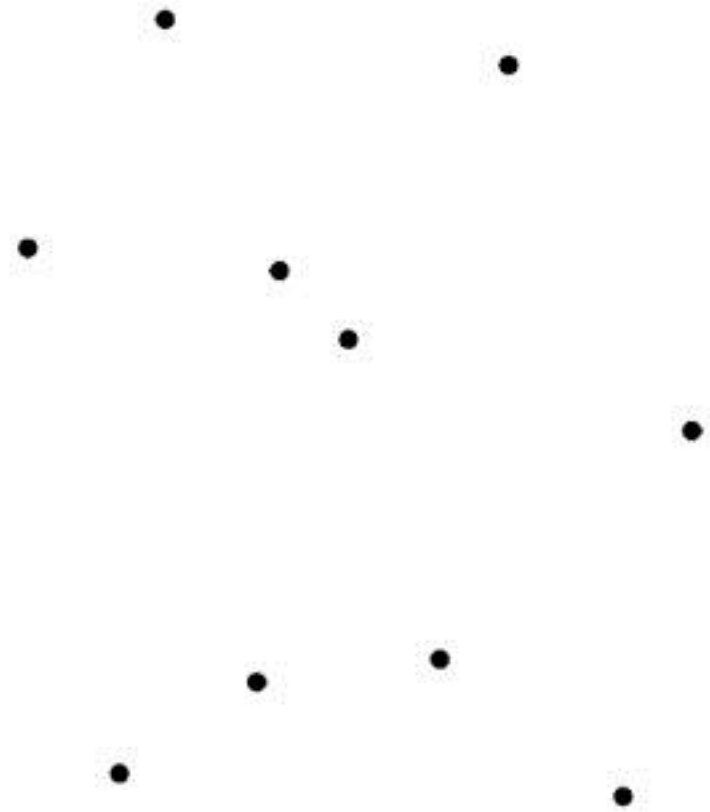
با توجه به مشاهده ۹,۳ بردار زاویه T در هر تکرار حلقه افزایش می یابد.
چون تعداد محدودی مثلث بندی از P وجود دارد، الگوریتم اتمام خواهد یافت.
نتیجه ی الگوریتم یک مثلث بندی مجاز است.

Algorithm LegalTriangulation(T)

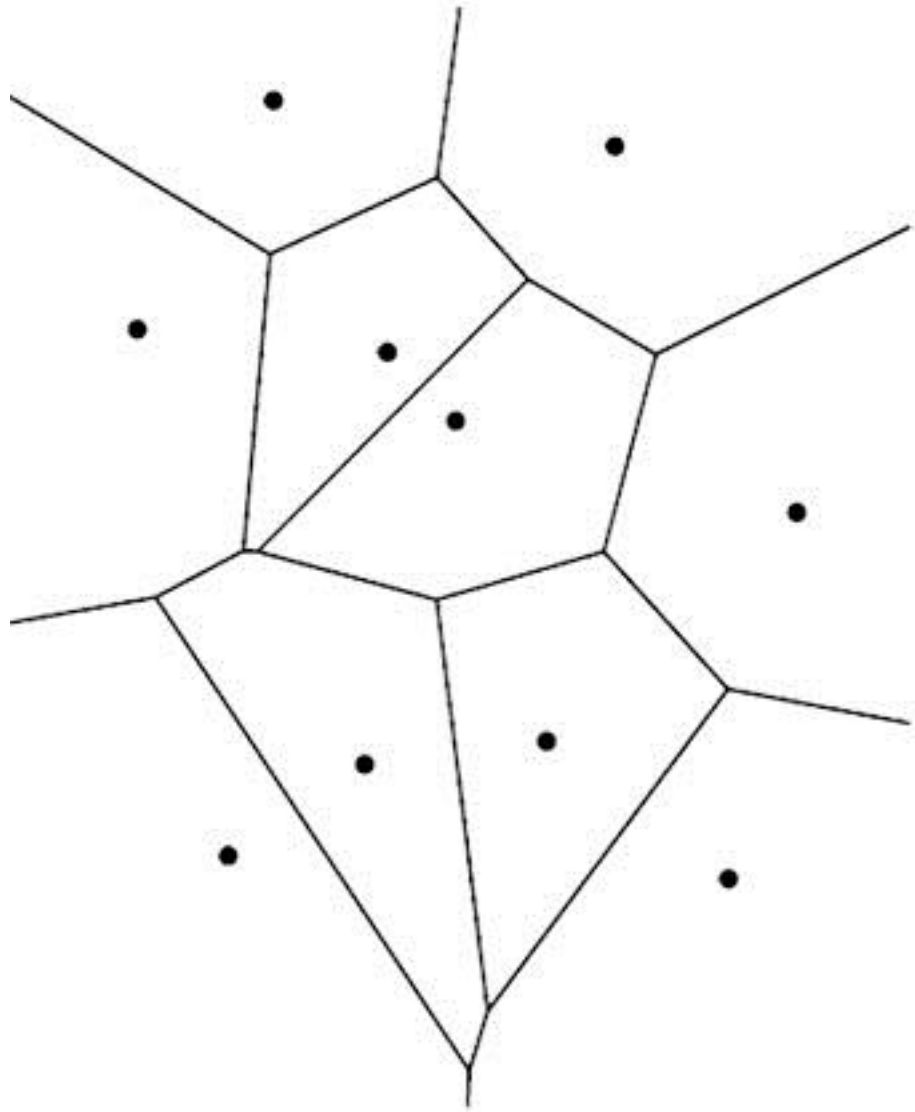
Input. A triangulation T of a point set P .

Output. A legal triangulation of P .

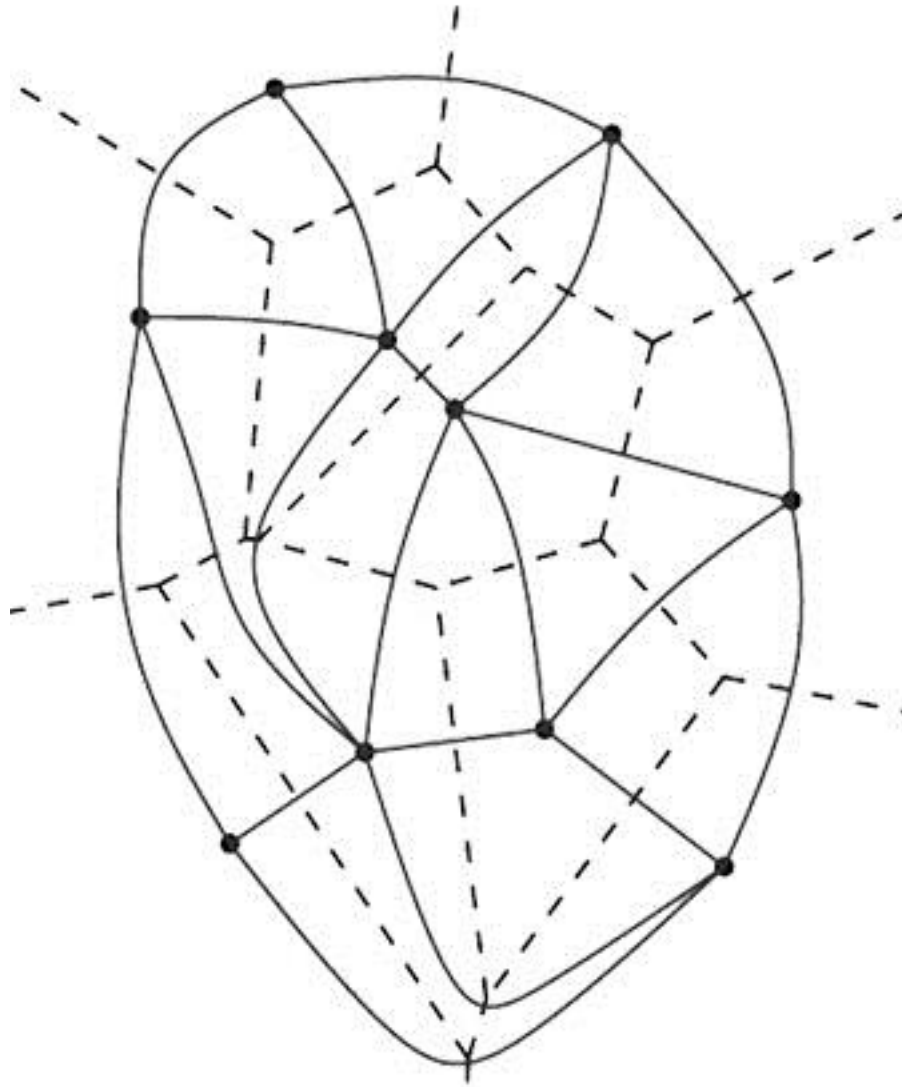
1. while T contains an illegal edge $p_i p_j$
2. do (Flip $p_i p_j$)
3. Let $p_i p_j p_k$ and $p_i p_j p_l$ be the two triangles adjacent to $p_i p_j$.
4. Remove $p_i p_j$ from T , and add $p_k p_l$ instead.
5. return T



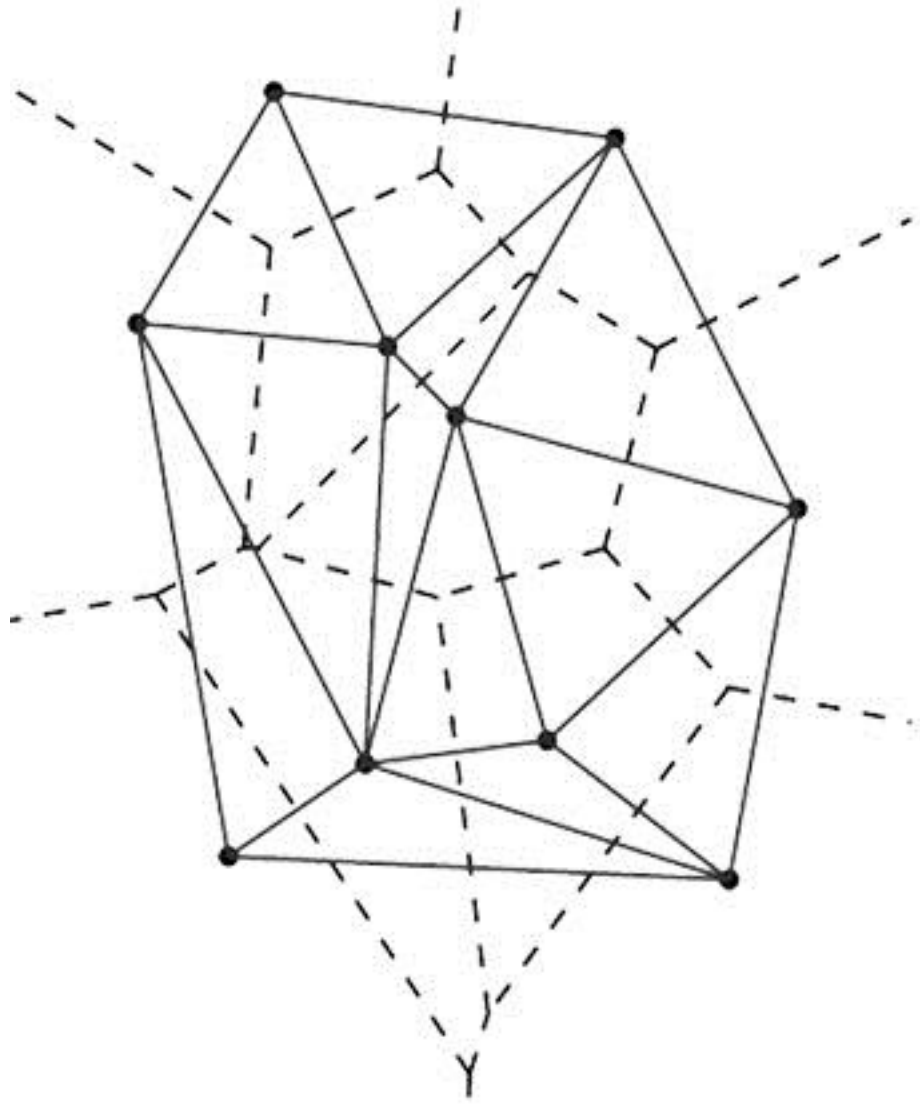
- فرض کنید P مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه است.
- ورونوی دیاگرام $Vor(P)$ زیر تقسیمی از صفحه به سلول‌های ورونوی $V(P)$ برای همه $p \in P$
- فرض کنید G گراف دوگان $Vor(P)$
- گراف دلونی $DG(P)$ یک گراف مسطح است.



- فرض کنید P مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه است.
- ورونوی دیاگرام $Vor(P)$ زیر تقسیمی از صفحه به سلول‌های ورونوی $V(P)$ برای همه $p \in P$
- فرض کنید G گراف دوگان $Vor(P)$
- گراف دلونی $DG(P)$ یک گراف مسطح است.



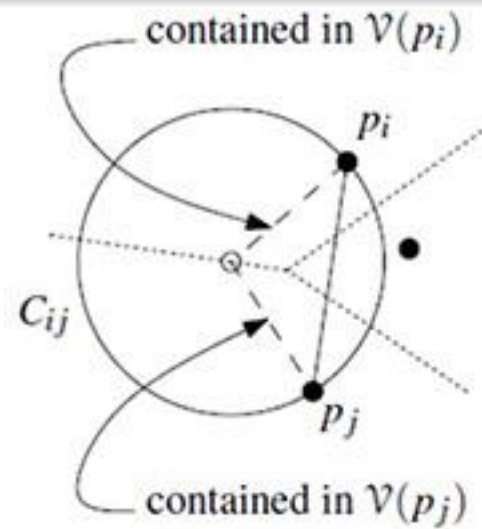
- فرض کنید P مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه است.
- ورونوی دیاگرام $Vor(P)$ زیر تقسیمی از صفحه به سلول‌های ورونوی $V(P)$ برای همه $p \in P$
- فرض کنید G گراف دوگان $Vor(P)$
- گراف دلونی $DG(P)$ یک گراف مسطح است.



- فرض کنید P مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه است.
- ورونوی دیاگرام $Vor(P)$ زیر تقسیمی از صفحه به سلول‌های ورونوی $V(P)$ برای همه $p \in P$
- فرض کنید G گراف دوگان $Vor(P)$
- گراف دلونی $DG(P)$ یک گراف مسطح است.

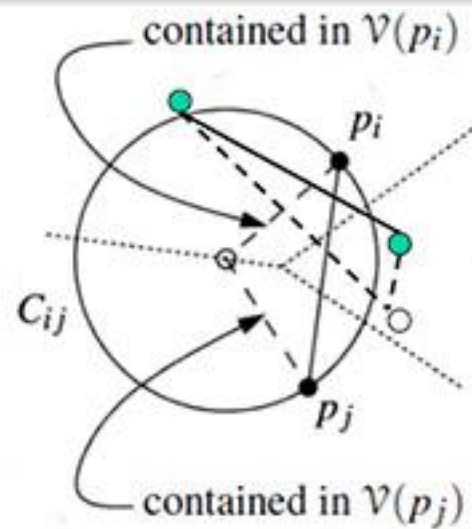
قضیه ۹,۵: گراف دلونی یک مجموعه نقاط در صفحه یک گراف مسطح است.

با استفاده از ویژگی دایره خالی و رونوی دیاگرام اثبات می‌کنیم.

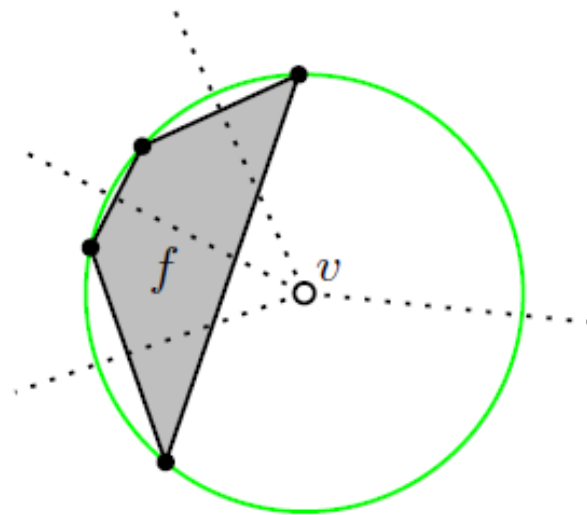


قضیه ۹,۵ : گراف دلونی یک مجموعه نقاط در صفحه یک گراف مسطح است.

با استفاده از ویژگی دایره خالی ورونوی دیاگرام اثبات می‌کنیم.



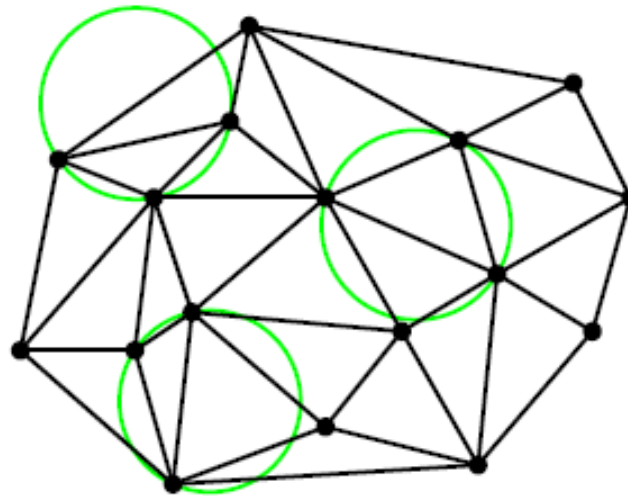
گراف دلونی برای هر رأس $Vor(P)$ یک وجه دارد.
 اگر یک رأس v از $Vor(P)$ یک رأس از سلول‌های ورونوی برای سایت‌های $p_1, p_2, \dots, p_k$ باشد آن‌گاه
 $p_1, p_2, \dots, p_k$ رأس‌های وجه متناظر f در $DG(P)$ خواهند بود.
 از قضیه ۷،۴(i): در این شرایط $p_1, p_2, \dots, p_k$ روی یک دایره به مرکز v قرار می‌گیرند.
 یک $k - gon$ و محدب است.



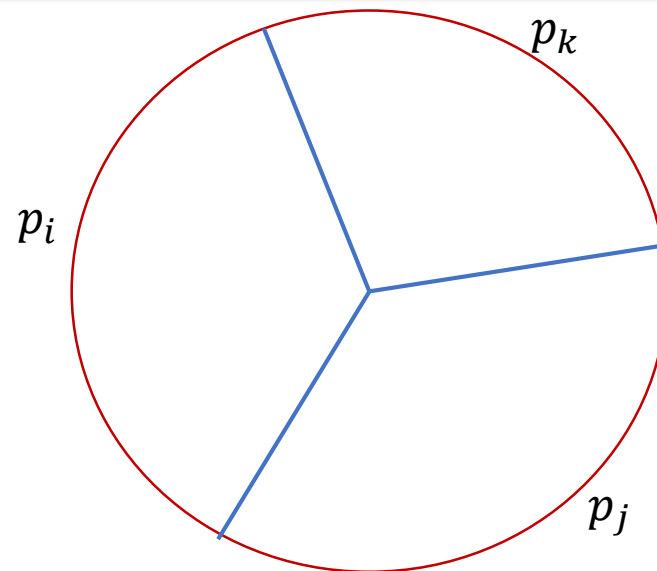
General Position: اگر هیچ ۴ نقطه‌ای روی یک دایره قرار نگیرند.

اگر مجموعه نقاط P , *General Position* باشند آن گاه همه‌ی رئوس ورونوی دیاگرام از درجه‌ی ۳ هستند.

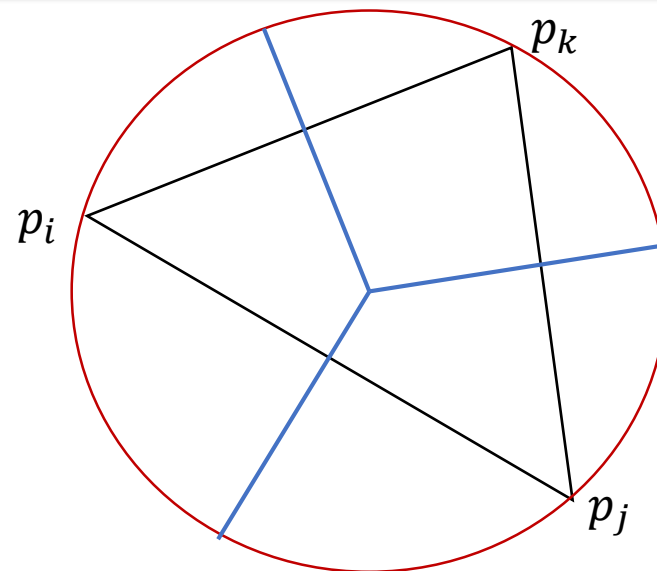
در نتیجه همه‌ی وجه‌های $DG(P)$ مثلث هستند.



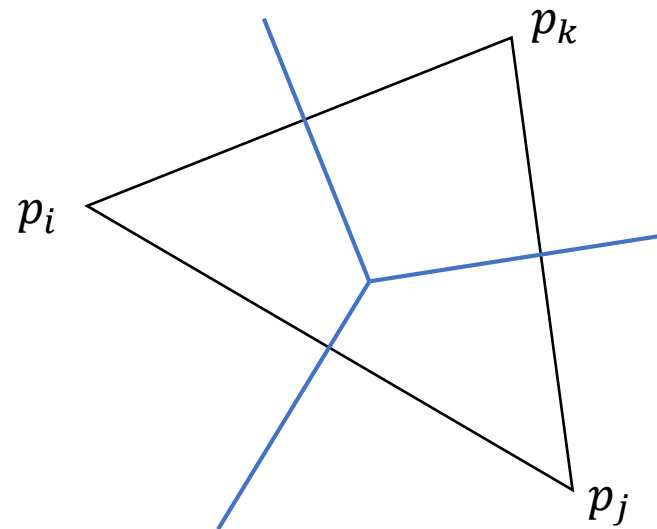
- قضیه ۹,۶: فرض کنید P مجموعه‌ای از نقاط در صفحه باشد
- I. سه نقطه‌ی $p_i, p_j, p_k \in P$ رئوسی از یک وجه یکسان از گراف دلونی P هستند اگر و فقط اگر دایره‌ی گذرنده از این سه نقطه، هیچ نقطه‌ای از P در داخلش نباشد.
 - II. دو نقطه $p_i, p_j \in P$ از یالی از گراف دلونی P هستند اگر و فقط اگر دایره خالی وجود داشته باشد که از هر دو نقطه بگذرد.



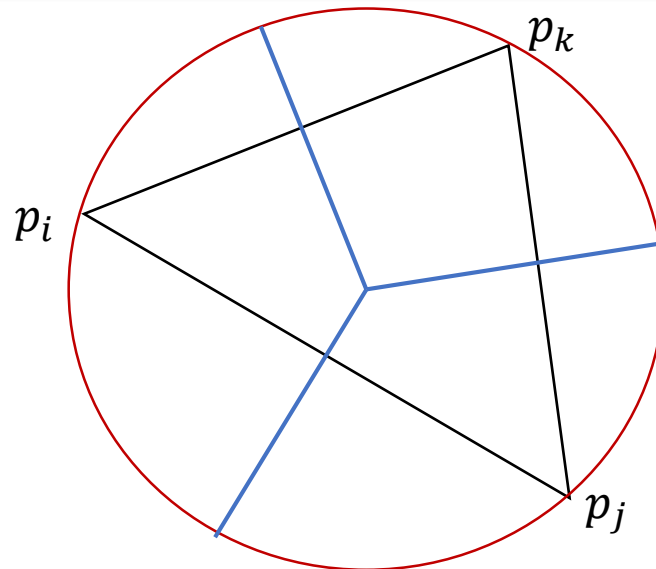
- قضیه ۹,۶: فرض کنید P مجموعه‌ای از نقاط در صفحه باشد
- I. سه نقطه‌ی $p_i, p_j, p_k \in P$ رئوسی از یک وجه یکسان از گراف دلونی P هستند اگر و فقط اگر دایره‌ی گذرنده از این سه نقطه، هیچ نقطه‌ای از P در داخلش نباشد.
- II. دو نقطه $p_i, p_j \in P$ از یالی از گراف دلونی P هستند اگر و فقط اگر دایره خالی وجود داشته باشد که از هر دو نقطه بگذرد.



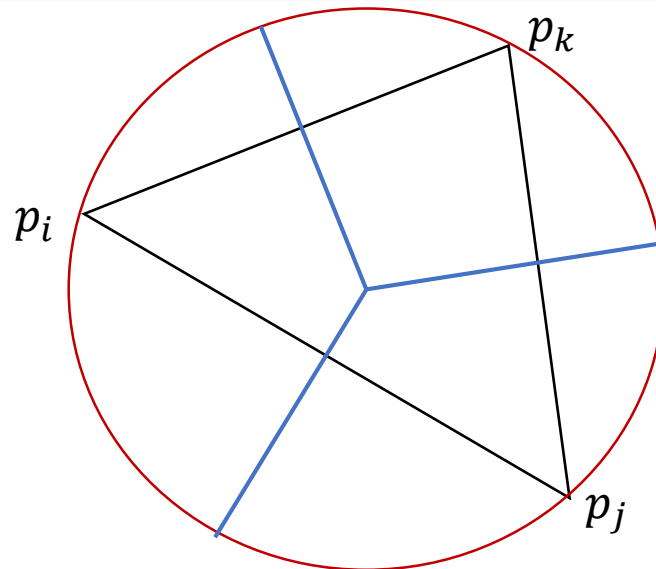
- قضیه ۹,۶: فرض کنید P مجموعه‌ای از نقاط در صفحه باشد
- I. سه نقطه‌ی $p_i, p_j, p_k \in P$ رئوسی از یک وجه یکسان از گراف دلونی P هستند اگر و فقط اگر دایره‌ی گذرنده از این سه نقطه، هیچ نقطه‌ای از P در داخلش نباشد.
- II. دو نقطه $p_i, p_j \in P$ از یالی از گراف دلونی P هستند اگر و فقط اگر دایره خالی وجود داشته باشد که از هر دو نقطه بگذرد.



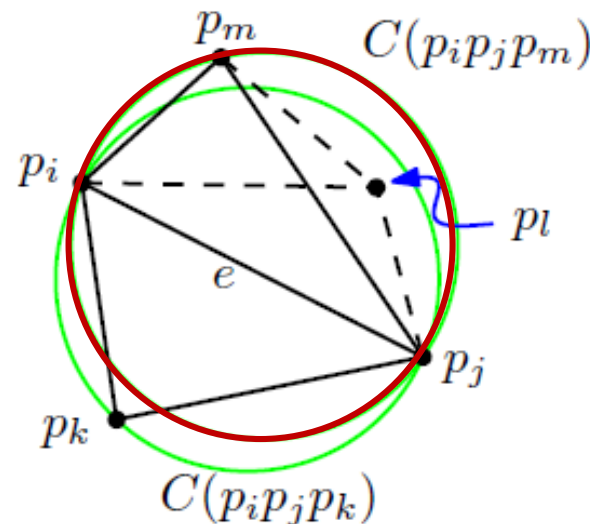
- قضیه ۹,۶: فرض کنید P مجموعه‌ای از نقاط در صفحه باشد
- I. سه نقطه‌ی $p_i, p_j, p_k \in P$ رئوسی از یک وجه یکسان از گراف دلونی P هستند اگر و فقط اگر دایره‌ی گذرنده از این سه نقطه، هیچ نقطه‌ای از P در داخلش نباشد.
- II. دو نقطه $p_i, p_j \in P$ از یالی از گراف دلونی P هستند اگر و فقط اگر دایره خالی وجود داشته باشد که از هر دو نقطه بگذرد.



قضیه ۹,۷ : فرض کنید P مجموعه‌ای از نقاط در صفحه و T یک مثلث‌بندی از P باشد. T یک مثلث‌بندی دلوئی از P است اگر و تنها اگر داخل دایره‌ی محیطی هر مثلث نقطه‌ای از P وجود نداشته باشد.

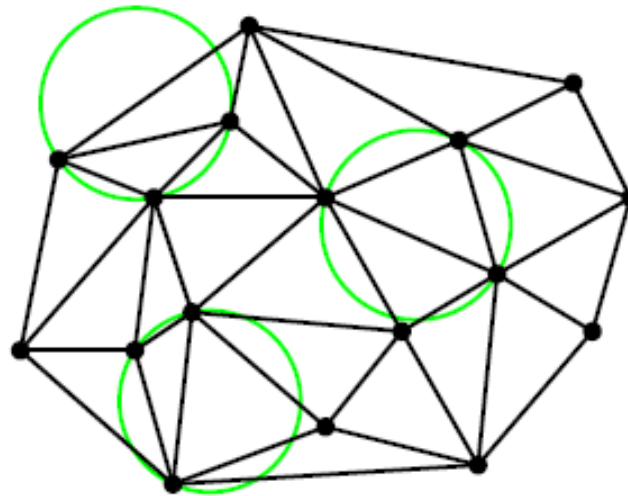


قضیه ۸,۹: فرض کنید P مجموعه‌ای از نقاط در صفحه و T یک مثلث‌بندی از P باشد. یک مثلث‌بندی مجاز است اگر و تنها اگر یک مثلث‌بندی دلونی از P باشد.



قضیه ۸,۹ بر این دلالت می کند که هر مثلث بندی بهینه زاویه ای یک مثلث بندی دلونی است. به این دلیل که هر مثلث بندی بهینه زاویه ای، مجاز است.

زمانی که P در *General Position* است فقط یک مثلث بندی مجاز وجود دارد که بهینه زاویه ای است یعنی مثلث بندی دلونی منحصر بفرد است.



قضیه ۹,۹: فرض کنید مجموعه‌ای از نقاط در صفحه باشد، هر مثلث‌بندی بهینه‌زاویه‌ای از یک مثلث‌بندی دلونی از است.

علاوه بر این، هر مثلث‌بندی دلونی از بزرگ‌ترین کوچک‌ترین زاویه را بین همه‌ی مثلث‌بندی‌ها دارد.

- چون مثلث‌بندی دلونی مجاز است و هر مثلث‌بندی مجاز، بهینه‌زاویه‌ای است پس مثلث‌بندی دلونی بهینه‌زاویه‌ای است.
- هر مثلث‌بندی که بهینه‌زاویه‌ای است، مجاز است. طبق قضیه قبل این مثلث‌بندی دلونی است.