به نام خدا

هندسه محاسباتی

مسعود صدیقی

زمستان ۱۳۹۲

Robot Motion Planning
برنامه ریزی حرکت ربات

Getting Where You Want to Be

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

در بخش گذشته مسئله برنامه ریزی حرکت یك ربات نقطه ای را حل کردیم:

محاسبه نقشه ذوزنقه ای از فضای آزاد ربات

استفاده از نقشه ذوزنقه ای برای برنامه ریزی حرکت

اگر ربات چند ضلعی باشد از روشی مشابه می توان استفاده نمود،

اما یك مشکل وجود دارد: فضای پیکربندی موانع دیگر همانند موانع در فضای کار نیست!

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

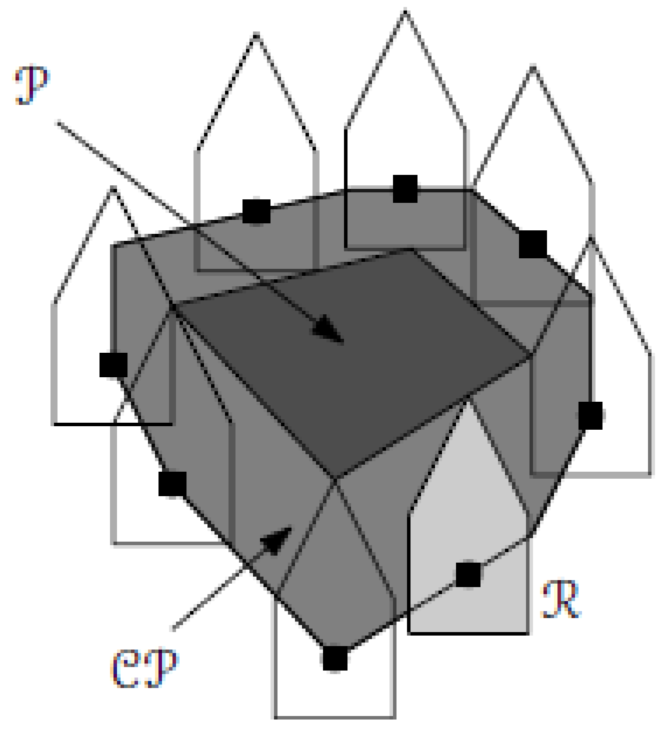
$\mathcal{C}$-obstacle (فضای پیکربندی یک مانع):

مجموعه ای از نقاط در فضای پیکربندی است به طوری که مکان مطابق با آن نقاط از ربات $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ با مانع $\mathcal{P}$ اشتراک داشته باشد،
بنابراین اگر فضای پیکربندی مانع $\mathcal{P}$ را با $\mathcal{CP}$ نشان دهیم خواهیم داشت:

$$\mathcal{CP} := \{(x, y) : \mathcal{R}(x, y) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset\}$$

Minkowski Sums

جمع های مینوکوفسکی

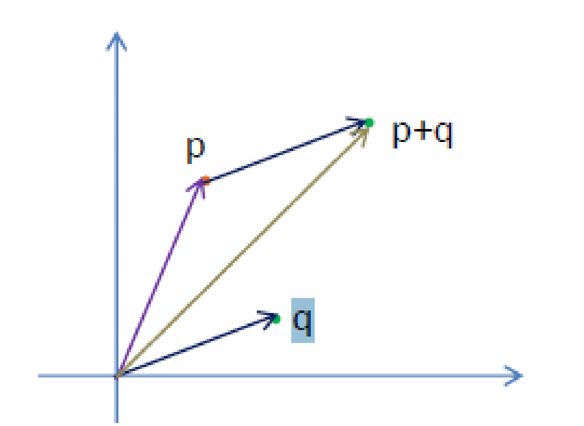


Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

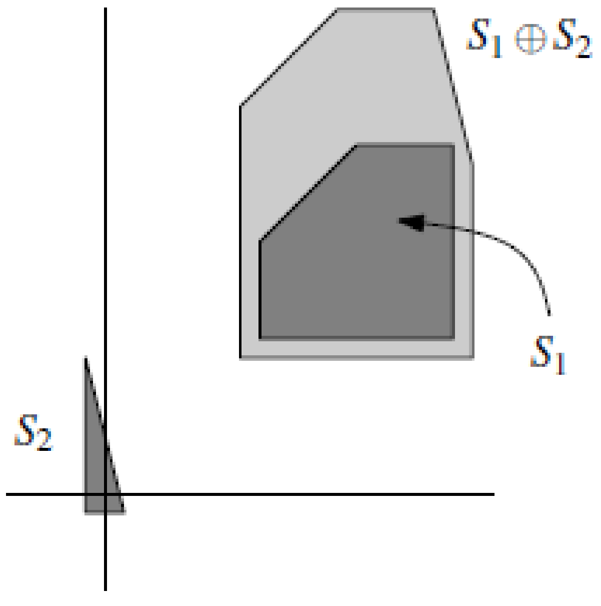
جمع مینوکوفسکی دو مجموعه $S_1 \subset \mathbb{R}^2$ و $S_2 \subset \mathbb{R}^2$ که با $S_1 \oplus S_2$
نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می شود:

$$S_1 \oplus S_2 := \{p + q \ : \ p \in S_1, q \in S_2\}$$

که p+q بردار مجموع دو بردار p و q می باشد، که اگر $p = (p_x, p_y)$
و $q = (q_x, q_y)$ باشد داریم: $p + q := (p_x + q_x, p_y + q_y)$



Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی



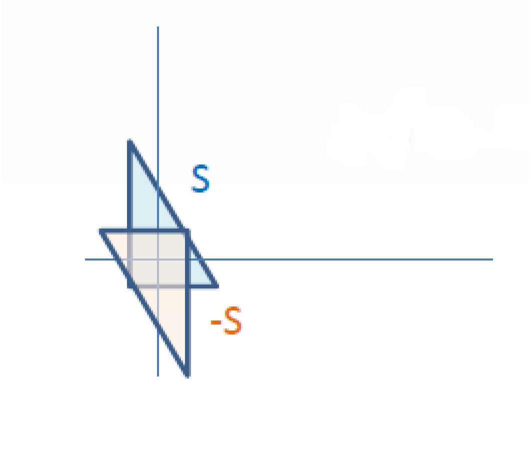
از آنجایی که یک چند ضلعی یک مجموعه مسطح است، جمع های مینوکوفسکی برای آن ها به کار گرفته می شود

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

برای بیان $\mathcal{C}$-obstacles با جمع های مینوکوفسکی به نماد گذاری های زیر احتیاج داریم:

برای یک نقطه $p = (p_x, p_y)$ ما $-p := (-p_x, -p_y)$ را تعریف می کنیم.

برای یک مجموعه S ما $-S := \{-p : p \in S\}$ تعریف می کنیم.



Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

قضیه ۱۳.۳:

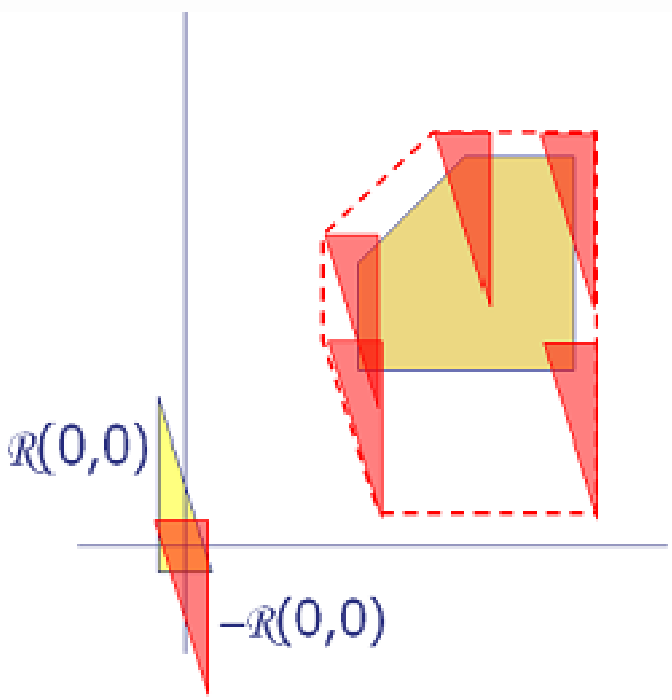
فرض کنید $\mathcal{R}$ یک ربات انتقالی مسطح و $\mathcal{P}$ یک مانع باشد، آنگاه $\mathcal{CP}$ برابر $\mathcal{P} \oplus (-\mathcal{R}(0,0))$ می باشد.

برهان:

باید نشان دهیم $\mathcal{R}(x,y)$ و $\mathcal{P}$ اشتراک دارند اگر و فقط اگر

$(x,y) \in \mathcal{P} \oplus (-\mathcal{R}(0,0))$

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

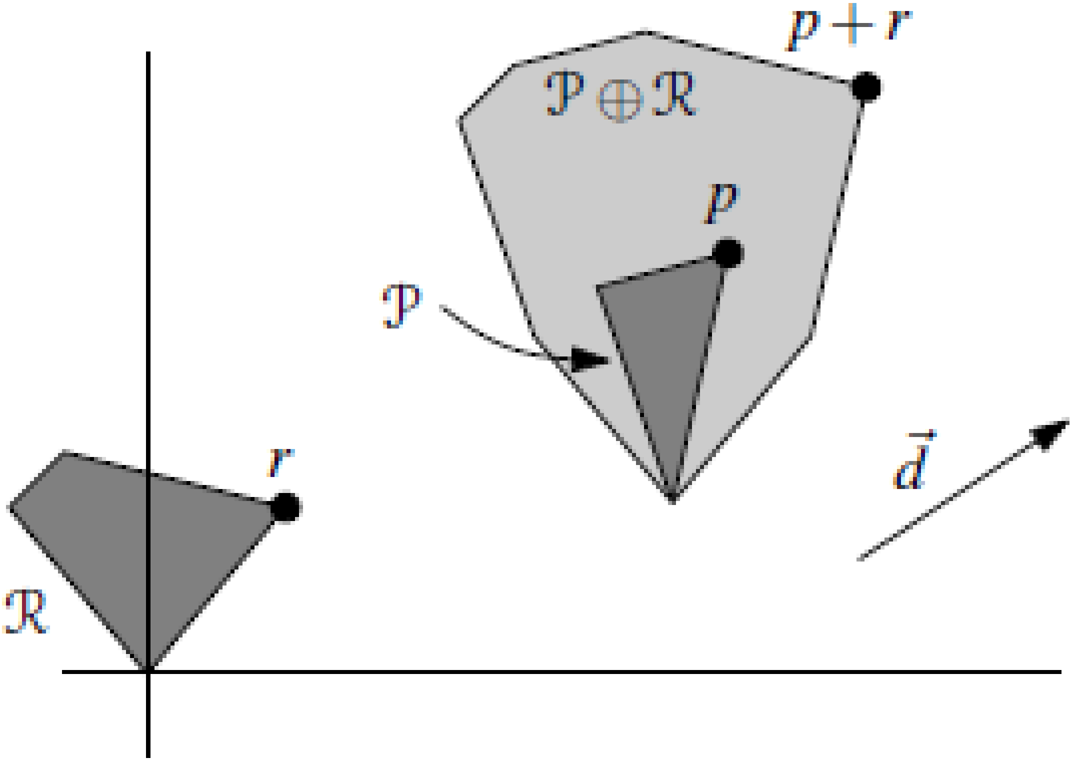


Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

در ادامه این قسمت خواصی مفید از جمع های مینوکوفسکی را نشان می دهیم و در آخر الگوریتمی جهت محاسبه آن ها ارائه می دهیم.

مشاهده ۱۳.٤:

فرض کنید $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ و $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ دو شیء در صفحه باشند و $\mathcal{CP} := \mathcal{P} \oplus \mathcal{R}$. دورترین نقطه در جهت $\vec{d}$ روی $\mathcal{CP}$ ، مجموع دورترین نقاط در جهت $\vec{d}$ روی $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ و $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ می باشد.



An extreme point on a Minkowski sum
is the sum of extreme points

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

با استفاده از مشاهده قبلی ثابت می کنیم جمع مینوکوفسکی دو چند ضلعی محدب، پیچیدگی خطی دارد.

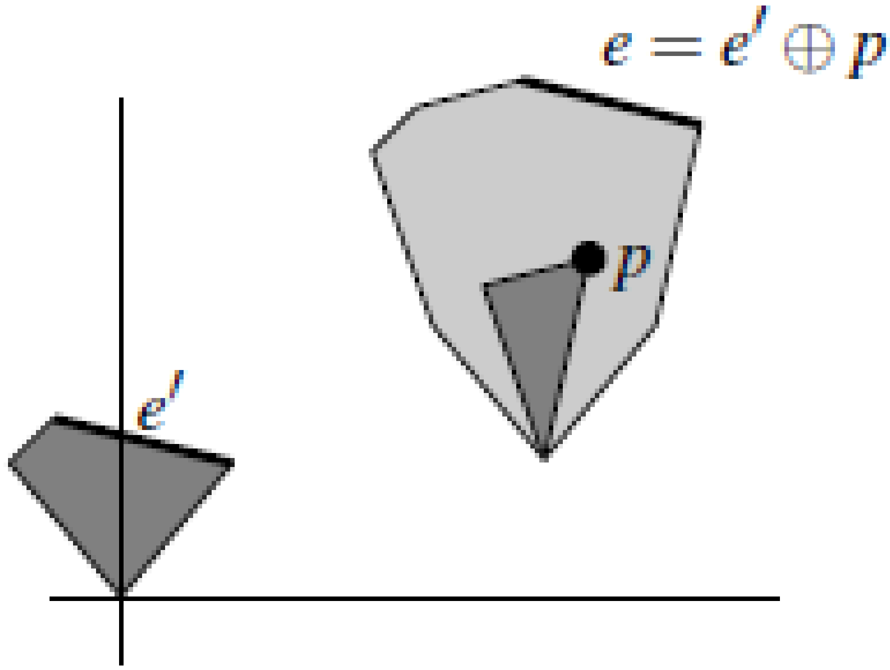
قضیه ۱۳.۵:

فرض کنید $\mathcal{P}$ و $\mathcal{R}$ دو چند ضلعی محدب به ترتیب با n و m یال باشند، آنگاه جمع مینوکوفسکی $\mathcal{P} \oplus \mathcal{R}$ یک چند ضلعی محدب با حداکثر $n+m$ یال می باشد.

برهان:

محدب بودن جمع مینوکوفسکی دو مجموعه محدب، مستقیماً از تعریف به دست می آید.

برای این که ببینیم پیچیدگی مجموع مینوکوفسکی خطی است شکل زیر را در نظر بگیرید:



Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

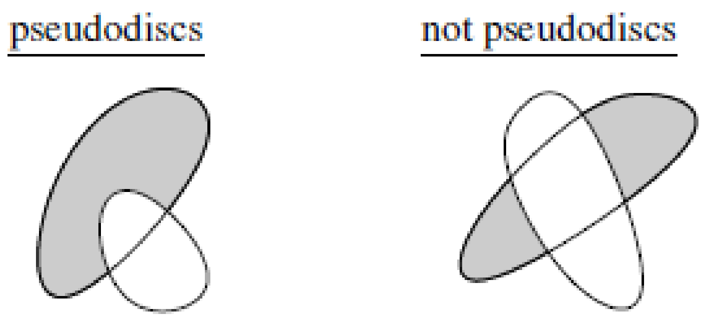
نکته ای دیگر وجود دارد: مرزهای دو جمع مینوکوفسکی به شیوه خاص با یکدیگر در تعامل هستند، برای دیدن این موضوع لازم است مفاهیمی دیگر معرفی شود.

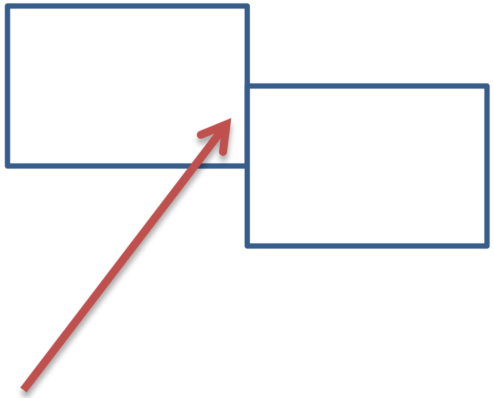
شبه دیسک ها:

دو شیء مسطح o_1 و o_2؛ که هریک با یک منحنی بسته ساده محدود شده اند در نظر بگیرید. جفت o_1 و o_2؛ را یک جفت شبه دیسک می نامیم، اگر مرزهایشان ∂o_1 و ∂o_2 در حداکثر دو نقطه تلاقی داشته باشند.

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

با توجه به شکل زیر تعریفی که از شبه دیسک ها گفته شد عمومی نیست.





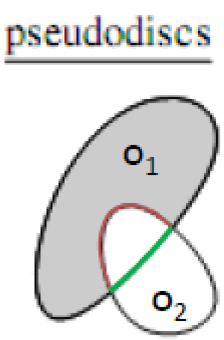
Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

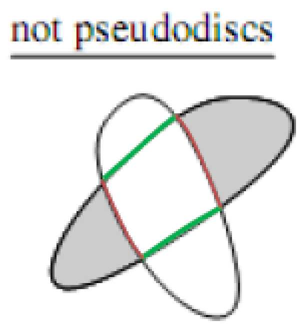
تعریف رسمی:

o_1 و o_2، را یک جفت شبه دیسک تعریف می کنیم اگر شرط زیر برقرار باشد:

$\partial o_1 \cap \text{int}(o_2)$ و $\partial o_2 \cap \text{int}(o_1)$ متصل باشند.

$\text{int}(o)$ ناحیه داخل شیء o، می باشد.





Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

یک مجموعه از اشیاء که هریک با یک منحنی بسته ساده محدود شده است را یک مجموعه شبه دیسک می نامیم اگر هر جفت شیء در آن مجموعه یک جفت شبه دیسک باشد.

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

تعریف:

دو چند ضلعی $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$ را در نظر بگیرید. یک نقطه اشتراک $p \in \partial\mathcal{P} \cap \partial\mathcal{P}'$ یک *boundary crossing* ست اگر $\partial\mathcal{P}$ ز داخل $\mathcal{P}'$ به خارج $\mathcal{P}'$ در p عبور کند.

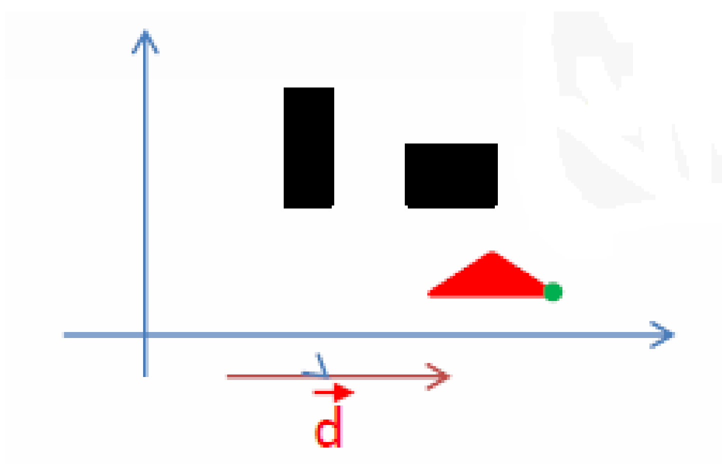
مشاهده ۱۳.٦:

یک جفت شبه دیسک چند ضلعی $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$ حداکثر دو *boundary crossing* تعریف می کنند.

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

در ادامه ثابت می کنیم یک مجموعه از جمع های مینوکوفسکی یک مجموعه شبه دیسک تشکیل می دهند، اما ابتدا به مشاهده و تعاریف زیر نیاز داریم.

یک چند ضلعی $\mathcal{P}$ دورتر از یک چند ضلعی دیگر $\mathcal{P}'$ در جهت $\vec{d}$ است، اگر دورترین نقطه $\mathcal{P}$ در جهت $\vec{d}$ از دورترین نقطه $\mathcal{P}'$ در جهت $\vec{d}$ دورتر باشد.



Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

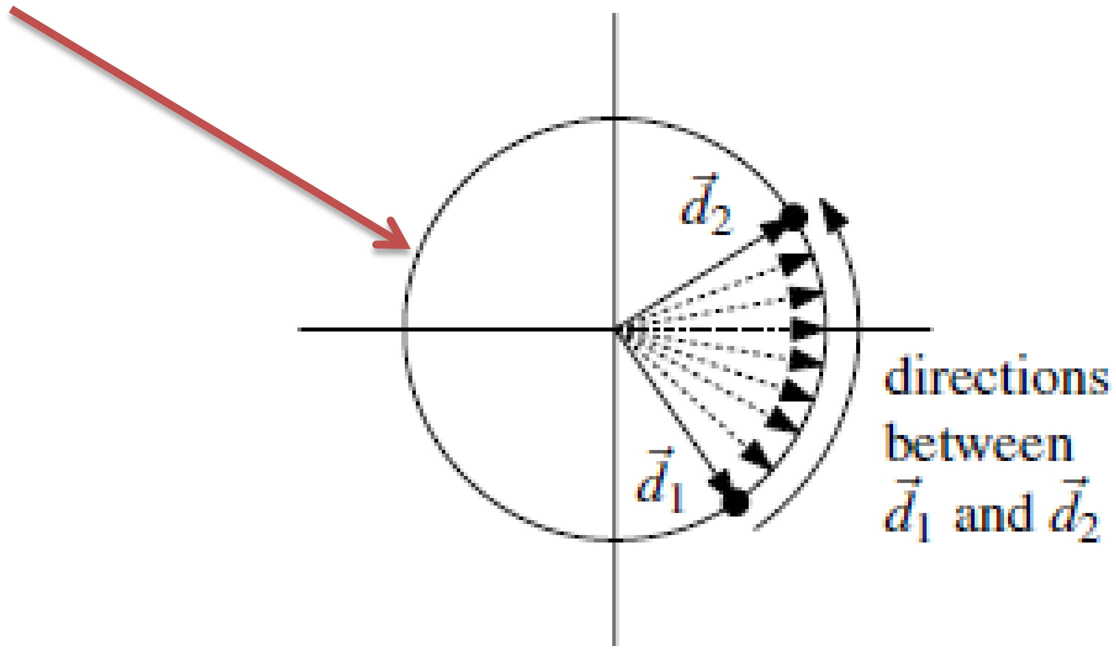
مجموعه تمام جهت ها با یک دایره واحد به مرکز مبدا مدل می شود:

یک نقطه p روی دایره مذکور یک جهت را نشان می دهد (که آن جهت با یک بردار از مبدا به نقطه p داده می شود.

یک بازه از جهت $\vec{d}_1$ به جهت $\vec{d}_2$ به عنوان تمام جهت های مطابق با نقاط روی تکه دایره پاد ساعت گرد از نقطه نشان دهنده $\vec{d}_1$ به نقطه نشان دهنده $\vec{d}_2$ تعریف می شود.

Minkowski Sums

جمع های مینوکوفسکی

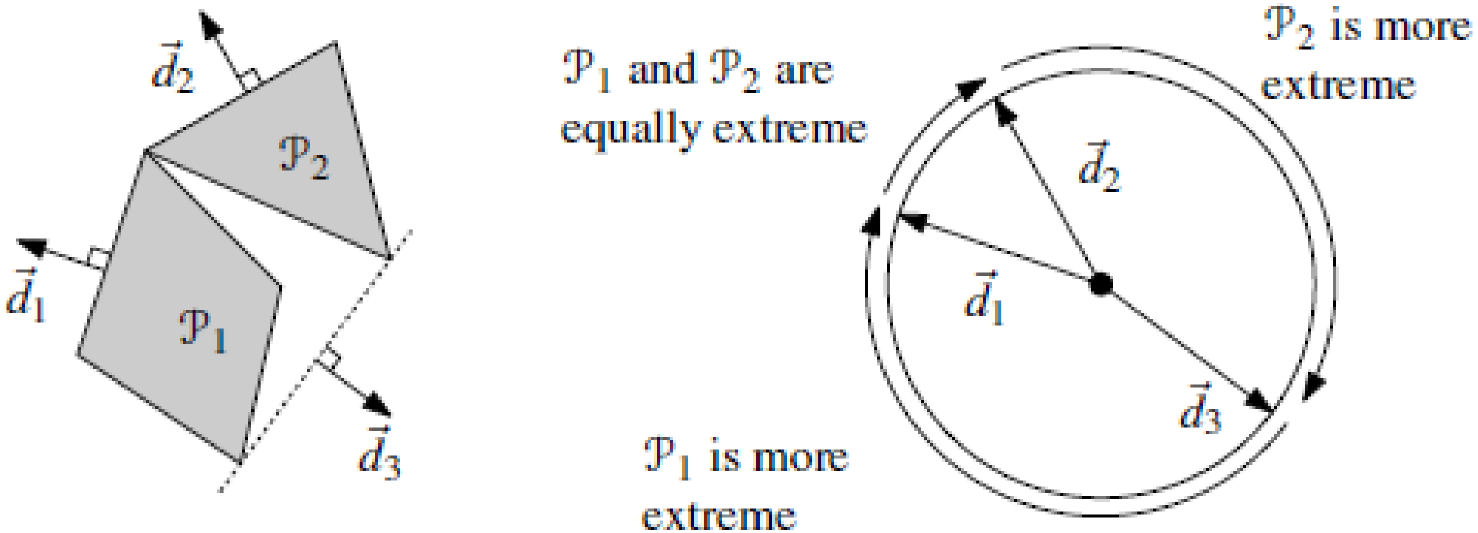


Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

مشاهده ۱۳.۷:

فرض کنید $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ چند ضلعی های محدب باشند به طوری که ناحیه داخلی آن ها بدون اشتراک باشد. فرض کنید $\vec{d}_1$ و $\vec{d}_2$ جهت هایی باشند که در آن ها $\mathcal{P}_1$ دورتر از $\mathcal{P}_2$ است، آنگاه یا در تمام جهت های بازه از $\vec{d}_1$ تا $\vec{d}_2$ یا در تمام جهت های بازه از $\vec{d}_2$ به $\vec{d}_1$، $\mathcal{P}_1$ دورتر از $\mathcal{P}_2$ خواهد بود.

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی



One convex polygon is more extreme than another for a connected range of directions

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

قضیه ۱۳.۸:

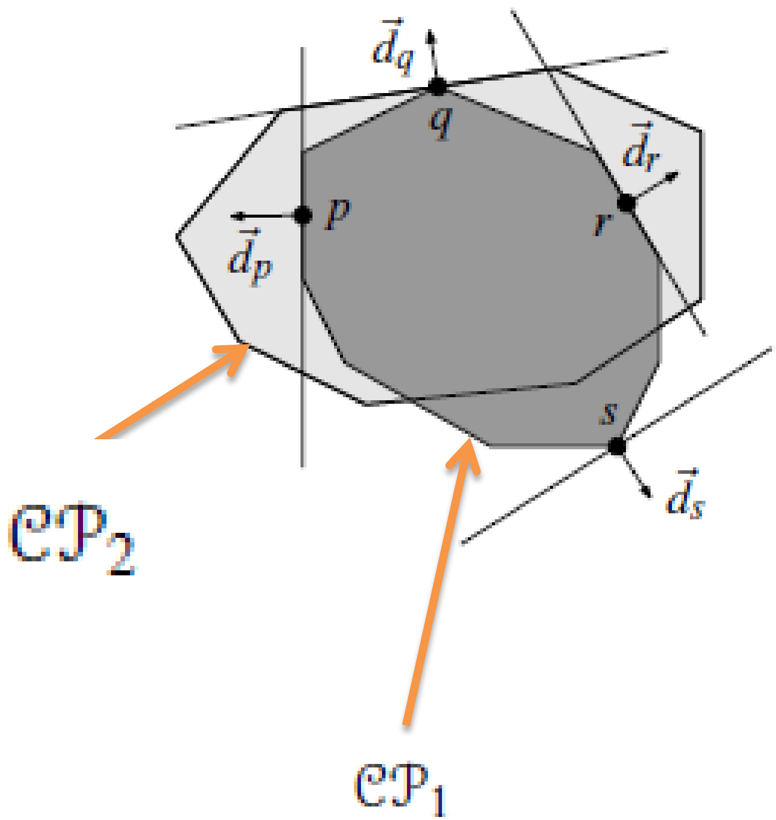
فرض کنید $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ دو چند ضلعی محدب باشند، به طوری که نواحی داخلی آن ها مجزا می باشد، فرض کنید $\mathcal{R}$ چند ضلعی محدب دیگری باشد آنگاه جمع مینوکوفسکی $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{R}$ و $\mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{R}$ شبه دیسک هستند.

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

برهان:

تعریف می کنیم $\mathcal{CP}_1 := \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{R}$ و
$\mathcal{CP}_2 := \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{R}.$ کافی است نشان
دهیم $\partial \mathcal{CP}_1 \cap \mathrm{int}(\mathcal{CP}_2)$ متصل
است.

برای این امر از برهان خلف استفاده نموده، فرض می کنیم
متصل نباشد و با مشاهده های ۱۳.۴ و ۱۳.۷ به تناقض می رسیم

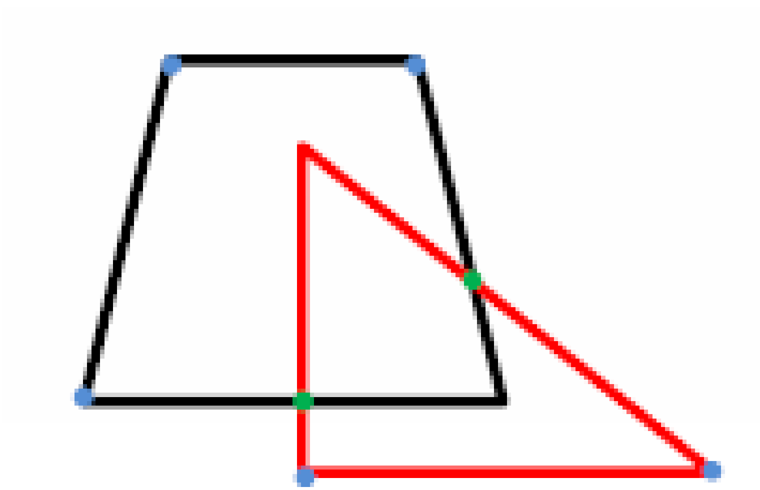


Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

قضیه ۱۳.۹:

فرض کنید S یک مجموعه از چند ضلعی های محدب شبه دیسک باشد که تعداد کل یال ها n هست، آنگاه پیچیدگی اجتماع آنها حداکثر $2n$ می باشد.

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

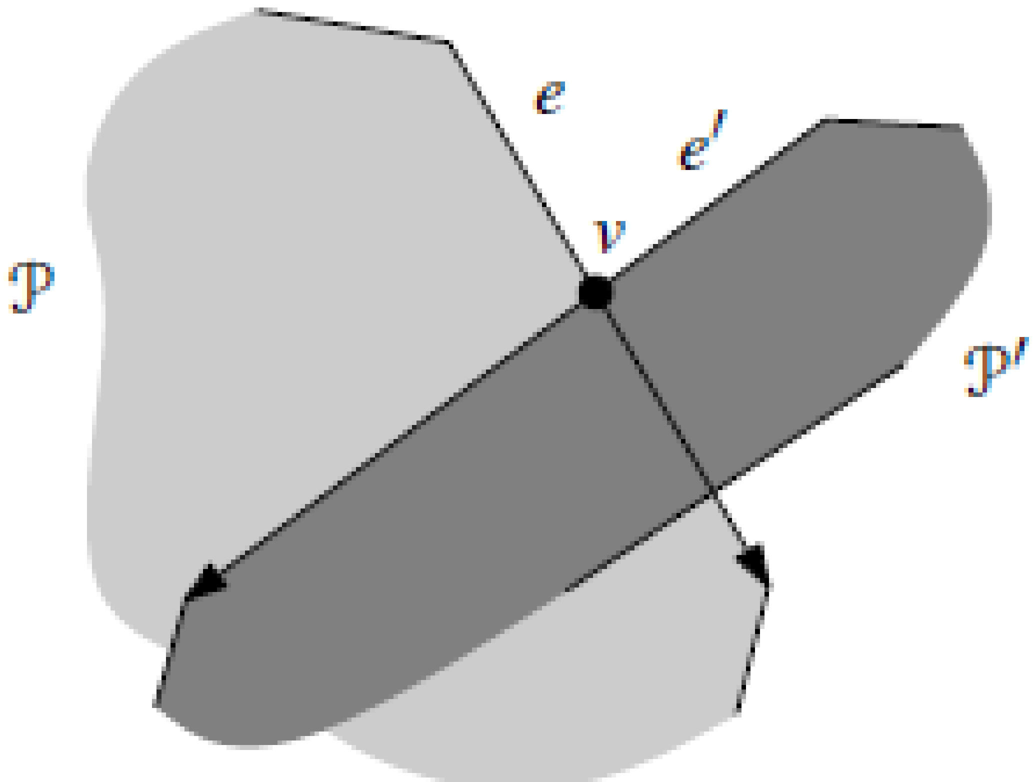


همان طور که در شکل روبرو دیده می شود رئوس اجتماع دو نوع است:

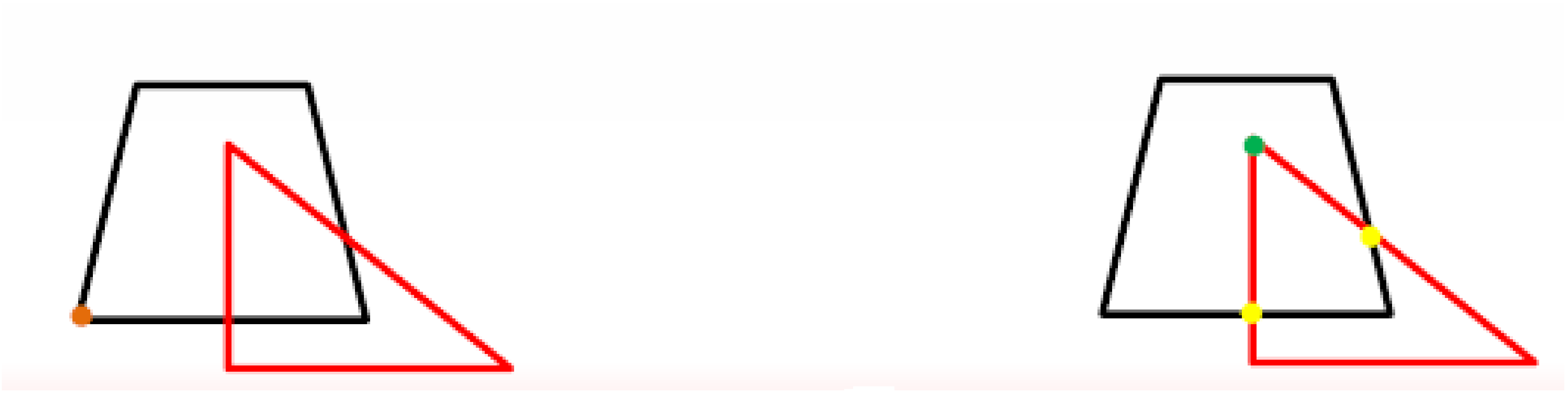
رئوس شبه دیسک(رئوس آبی رنگ)

رئوس ناشی از اشتراک دو یال دو شبه دیسک

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی



Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی



Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

اکنون الگوریتم هایی را جهت محاسبه مجموع مینوکوفسکی ارائه می دهیم:

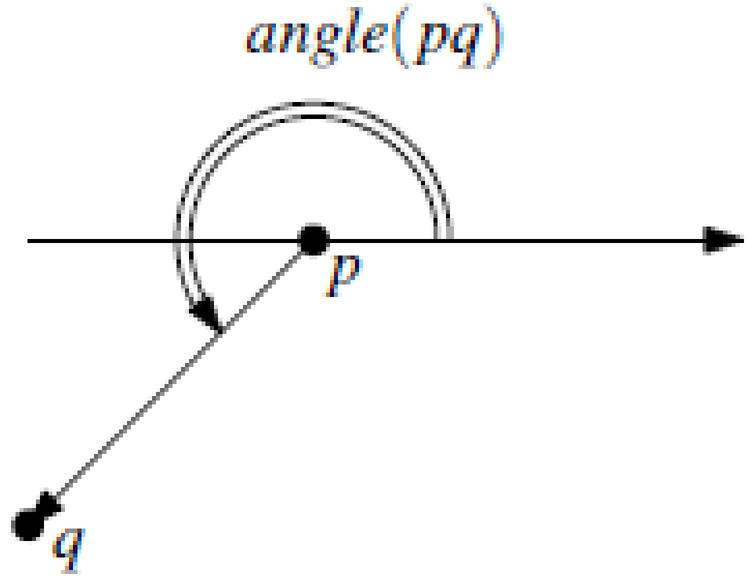
الگوریتم ۱:

برای هر جفت راس v, w ($v \in \mathcal{P}$ and $w \in \mathcal{R}$)، $v + w$ را محاسبه می کنیم.

در این گام غشای محدب تمام نقاط به دست آمده از گام ۱ را محاسبه می کنیم.

متاسفانه این الگوریتم بهینه نیست.

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی



Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

Algorithm MINKOWSKISUM($\mathcal{P}, \mathcal{R}$)

Input. A convex polygon $\mathcal{P}$ with vertices $v_1, \ldots, v_n$, and a convex polygon $\mathcal{R}$ with vertices $w_1, \ldots, w_m$. The lists of vertices are assumed to be in counter-clockwise order, with v_1 and w_1 being the vertices with smallest y-coordinate (and smallest x-coordinate in case of ties).

Output. The Minkowski sum $\mathcal{P} \oplus \mathcal{R}$.

1. $i \leftarrow 1$; $j \leftarrow 1$
2. $v_{n+1} \leftarrow v_1$; $v_{n+2} \leftarrow v_2$; $w_{m+1} \leftarrow w_1$; $w_{m+2} \leftarrow w_2$
3. **repeat**
4. Add $v_i + w_j$ as a vertex to $\mathcal{P} \oplus \mathcal{R}$.
5. **if** $angle(v_i v_{i+1}) < angle(w_j w_{j+1})$
6. **then** $i \leftarrow (i+1)$
7. **else if** $angle(v_i v_{i+1}) > angle(w_j w_{j+1})$
8. **then** $j \leftarrow (j+1)$
9. **else** $i \leftarrow (i+1)$; $j \leftarrow (j+1)$
10. **until** $i = n+1$ **and** $j = m+1$

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

قضیه ۳.۱۰:

جمع مینوکوفسکی دو چند ضلعی محدب به ترتیب با n و m راس، در زمان $O(n+m)$ محاسبه می شود.

در مطالبی که تا کنون بیان شد فرض کردیم چند ضلعی ها محدب هستند اکنون اگر یک یا هر دو چند ضلعی غیر محدب باشند چه اتفاقی می افتد؟!

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

برای هر سه مجموعه S_1، S_2 و S_3 خاصیت زیر را داریم:

$$S_1 \oplus (S_2 \cup S_3) = (S_1 \oplus S_2) \cup (S_1 \oplus S_3).$$

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

اکنون جمع مینوکوفسکی یک چند ضلعی غیر محدب $\mathcal{P}$ و یک چند ضلعی محدب $\mathcal{R}$ به ترتیب با n و m راس در نظر بگیرید.
پیچیدگی $\mathcal{P} \oplus \mathcal{R}$ چیست؟

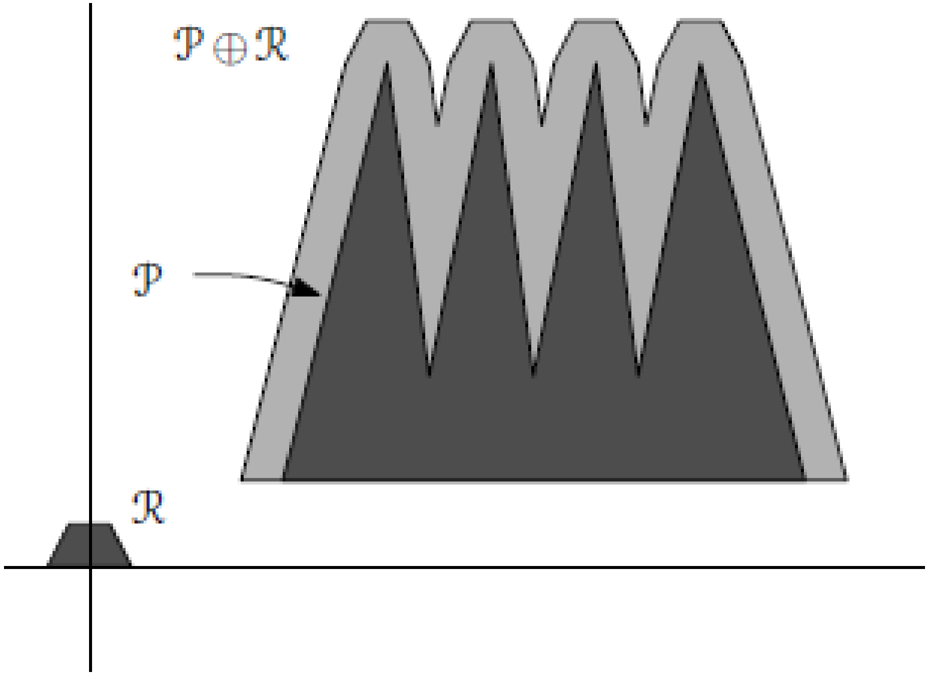
چند ضلعی غیر محدب $\mathcal{P}$ می تواند مثلث بندی شود که حاصل $n-2$ مثلث $t_1, \ldots, t_{n-2}$ خواهد بود.

اکنون با خاصیت جمع مینوکوفسکی گفته شده در اسلاید قبل رابطه زیر را نتیجه می گیریم:

$$\mathcal{P} \oplus \mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^{n-2} t_i \oplus \mathcal{R}.$$

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

پیچیدگی $\mathcal{P} \oplus \mathcal{R}$، $O(nm)$. خواهد بود.



Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

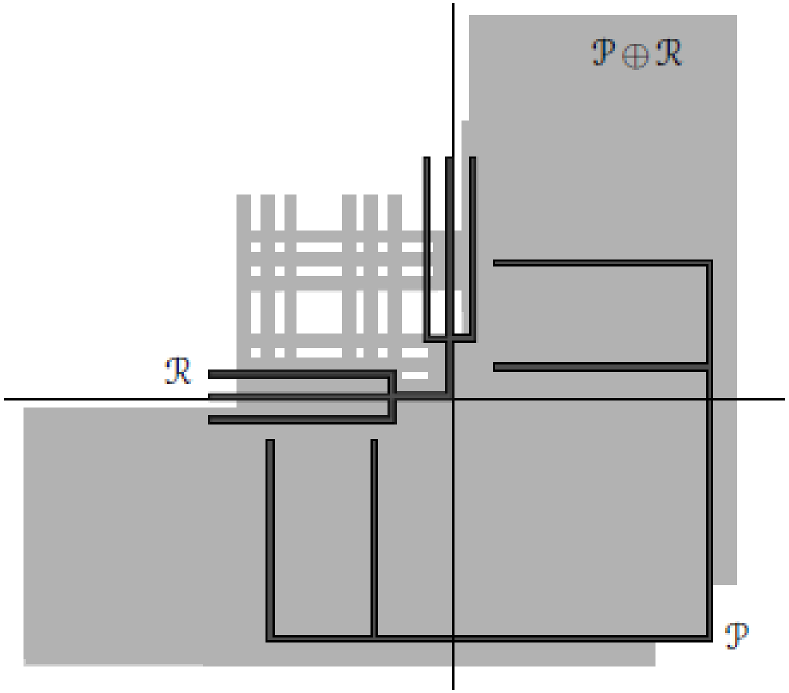
پیچیدگی مجموع مینوکوفسکی دو چند ضلعی غیر محدب $\mathcal{P}$ و $\mathcal{R}$ چیست؟

ابتدا باید هر دو را مثلث بندی کرده و سپس یک مجموعه از $n-2$ مثلث $t_i,$ و یک مجموعه از $m-2$ مثلث $u_j.$ خواهیم داشت.

جمع مینوکوفسکی $\mathcal{P}$ و $\mathcal{R}$ اجتماع جمع های مینوکوفسکی جفت های $t_i, u_j.$ می باشد

در نتیجه پیچیدگی $\mathcal{P} \oplus \mathcal{R}$، $O(n^2m^2).$ خواهد بود.

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی



The Minkowski sum of two non-convex polygons

Minkowski Sums
جمع های مینوکوفسکی

قضیه ۱۳.۱۱:

فرض کنید $\mathcal{P}$ و $\mathcal{R}$ چند ضلعی های به ترتیب با n و m راس باشند، پیچیدگی جمع مینوکوفسکی $\mathcal{R} \oplus \mathcal{P}$ به صورت زیر کران دار می شود:

۱. اگر هر دو جند ضلعی محدب باشند، پیچیدگی $O(n+m)$ خواهد بود.

۲. اگر یکی محدب و دیگری غیر محدب باشد پیچیدگی $O(nm)$. خواهد بود.

۳. اگر هر دو غیر محدب باشند پیچیدگی $O(n^2m^2)$. خواهد بود.

با تشکر