

به نام ایزد دانا

طراحی و تحلیل الگوریتم

مهدیه هاشمی نژاد

hasheminezhad@yazd.ac.ir

بهمن ۹۵

مراجع

- داده ساختارها و مبانی الگوریتم ها (نوشته: محمد قدسی)
- Introduction to Algorithms(CLRS)
(T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein)
- آشنایی با الگوریتم‌ها جلد ۱ و ۲ (ترجمه CLRS توسط مهندس دهقان)
- آشنایی با الگوریتم‌ها جلد ۱ (ترجمه CLRS توسط حسین ابراهیم زاده قلزم)

ارزیابی

- تکلیف ۳ نمره (کلاس حل تمرین و تکلیف، سرکار خانم سعیدی)
- میان ترم (۸ نمره، یکشنبه ۳ اردیبهشت ماه)
- پایان ترم ۹ نمره

مباحث

• یادآوری

- الگوریتم و رشد تابع (فصل ۱، ۲، ۳)
- تقسیم و غلبه (فصل ۴)
- ساختمان داده ها (فصل ۱۰، ۱۱، ۱۲)
- مرتب سازی (فصل ۶، ۷، ۸، ۹)

• الگوریتم های گراف

- DFS , BFS (فصل ۲۲)
- درخت پوشای مینیمم (فصل ۲۳)
- کوتاهترین مسیر (فصل ۲۴ و ۲۵)
- ماکزیمم جریان (فصل ۲۶)

الگوریتم و رشد تابع

- طراحی الگوریتم

روش پیش رونده (Incremental)

(مرتب سازی درجی، مرتب سازی حبابی،...)

روش تقسیم و غلبه (Divide and Conquer)

(مرتب سازی ادغامی، مرتب سازی سریع،...)

الگوریتم و رشد تابع

- تحلیل الگوریتم

- اثبات درستی الگوریتم

- کارایی الگوریتم (پیچیدگی زمانی و حافظه مورد نیاز)

علامت گذاری مجانبی (O, Ω, Θ)

گوییم $f(n) \in O(g(n))$ اگر و فقط اگر وجود داشته باشد مقدار

حقیقی و مثبت c و مقدار صحیح و نامنفی N بطوری که برای

$$f(n) \leq cg(n) \quad \text{هر } n \geq N$$

علامت گذاری مجانبی (O, Ω, Θ)

مثال:

$$n^2 + 100n \in O(n^3)$$

$$\log n \in O(n)$$

$$An^s \in O(n^t) \Leftrightarrow s \leq t$$

$$\log n \in O(n^t) \Leftrightarrow 0 < t$$

$$n^{100} \in O(2^n)$$

علامت گذاری مجانبی (O, Ω, Θ)

$$\exists \alpha \in R, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \alpha \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$$

علامت گذاری مجانبی (O, Ω, Θ)

گوییم $f(n) \in \Omega(g(n))$ اگر و فقط اگر وجود داشته باشد مقدار حقیقی و مثبت c و مقدار صحیح و نامنفی N بطوری که برای هر $n \geq N$ ، $f(n) \geq cg(n)$.

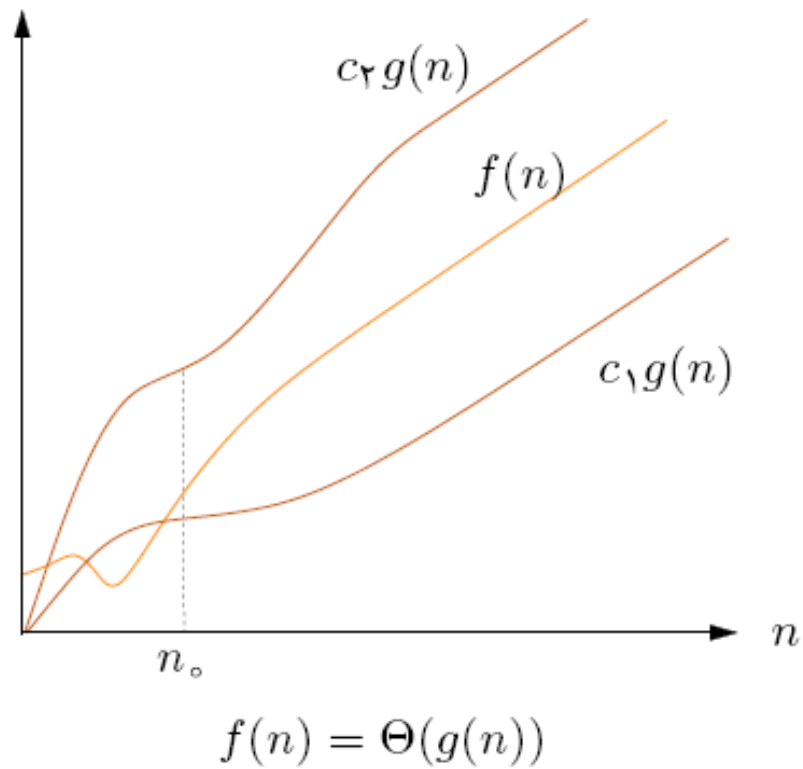
علامت گذاری مجانبی (O, Ω, Θ)

$$\exists \alpha \in R, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \alpha \Rightarrow f(n) \in \Omega(g(n))$$

علامت گذاری مجانبی (O, Ω, Θ)

گوییم $f(n) \in \Theta(g(n))$ اگر و فقط اگر وجود داشته باشد مقادیر حقیقی و مثبت c' و c و مقدار صحیح و نامنفی N بطوری که برای هر $n \geq N$ ، $c'g(n) \leq f(n) \leq cg(n)$.

علامت گذاری مجانبی (O, Ω, Θ)



علامت گذاری مجانبی (O, Ω, Θ)

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \alpha \Rightarrow f(n) \in \theta(g(n))$$

علامت گذاری مجانبی (O, Ω, Θ)

اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ بی نهایت شود یا وجود داشته باشد آنگاه :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq \infty \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0 \Rightarrow f(n) \in \Omega(g(n))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0, \infty \Rightarrow f(n) \in \theta(g(n))$$

تمرین

□ درستی گزاره های زیر را اثبات کنید :

$$f(n) \in \theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \in \Omega(g(n))$$

$$f(n) \in \theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \theta(f(n)) \Leftrightarrow \theta(f(n)) = \theta(g(n))$$

$$f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$$

تمرین

هم ارزی گزاره های زیر را اثبات کنید : 

$$a) \theta(f(n)) = \theta(g(n))$$

$$b) \Omega(f(n)) = \Omega(g(n))$$

$$c) O(f(n)) = O(g(n))$$

علامت گذاری مجانبی (o)

گوییم $f(n) \in o(g(n))$ اگر و فقط اگر وجود داشته باشد مقدار

حقیقی و مثبت c و مقدار صحیح و نامنفی N بطوری که برای

$$f(n) < cg(n) \quad \text{هر } n \geq N$$

علامت گذاری مجانبی (Ω)

گوییم $f(n) \in \Omega(g(n))$ اگر و فقط اگر وجود داشته باشد مقدار حقیقی و مثبت c و مقدار صحیح و نامنفی N بطوری که برای هر $n \geq N$ ، $f(n) > cg(n)$.

تقسیم و غلبه (Divide and Conquer)

- در این روش مسئله به تعدادی زیر مسئله که نمونه های کوچکتری از مسئله هستند تقسیم می شود، زیرمسئله ها به صورت بازگشتی حل می شود و سپس از ترکیب جواب زیر مسئله ها، جواب مسئله اصلی به دست می آید.

- **تقسیم (Divide):** تقسیم مسئله اصلی به زیر مسئله هایی که نمونه های کوچکتری از مسئله هستند.

- **غلبه (Conquer):** زیرمسئله ها به صورت بازگشتی (اگر اندازه زیر مسئله ها به اندازه کافی کوچک باشد بصورت مستقیم حل می شوند)

- **ترکیب (Combine):** از ترکیب جواب زیر مسئله ها، جواب مسئله اصلی به دست می آید.

روش‌های حل رابطه‌های بازگشتی

- (۱) حدس و استقرا: حدس خوب و استقرا
- (۲) تکرار با جای‌گذاری: بازکردن فرمول و به‌دست آوردن جواب به‌طور صریح
- (۳) قضیه‌ی اصلی
- (۴) روش‌های حل رابطه‌های بازگشتی همگن و ناهمگن
- (۵) روش‌های دیگر مانند تابع مولد

تکرار با جایگزاری

$$T(n) = T(n-1) + n$$

$$T(2) = 1$$

$$T(n) = T(n-1) + n = T(n-2) + n-1 + n =$$

$$T(n-3) + n-2 + n-1 + n = T(2) + \theta(n^2)$$

$$T(n) \in \theta(n^2)$$

الگوریتم مرتب سازی ادغامی

MERGE-SORT (A, p, r)

▷ A : آرایه ای که قرار است بین دو اندیس زیر مرتب شود

▷ p : اندیس شروع

▷ r : اندیس پایانی

1 if $p < r$

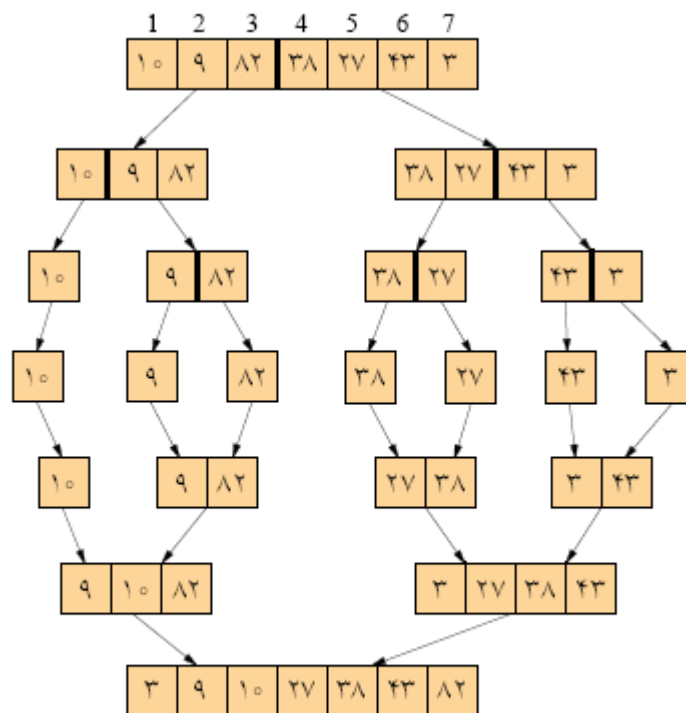
2 then $q \leftarrow \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$

3 MERGE-SORT(A, p, q)

4 MERGE-SORT($A, q + 1, r$)

5 MERGE (A, p, q, r)

الگوریتم مرتب سازی ادغامی



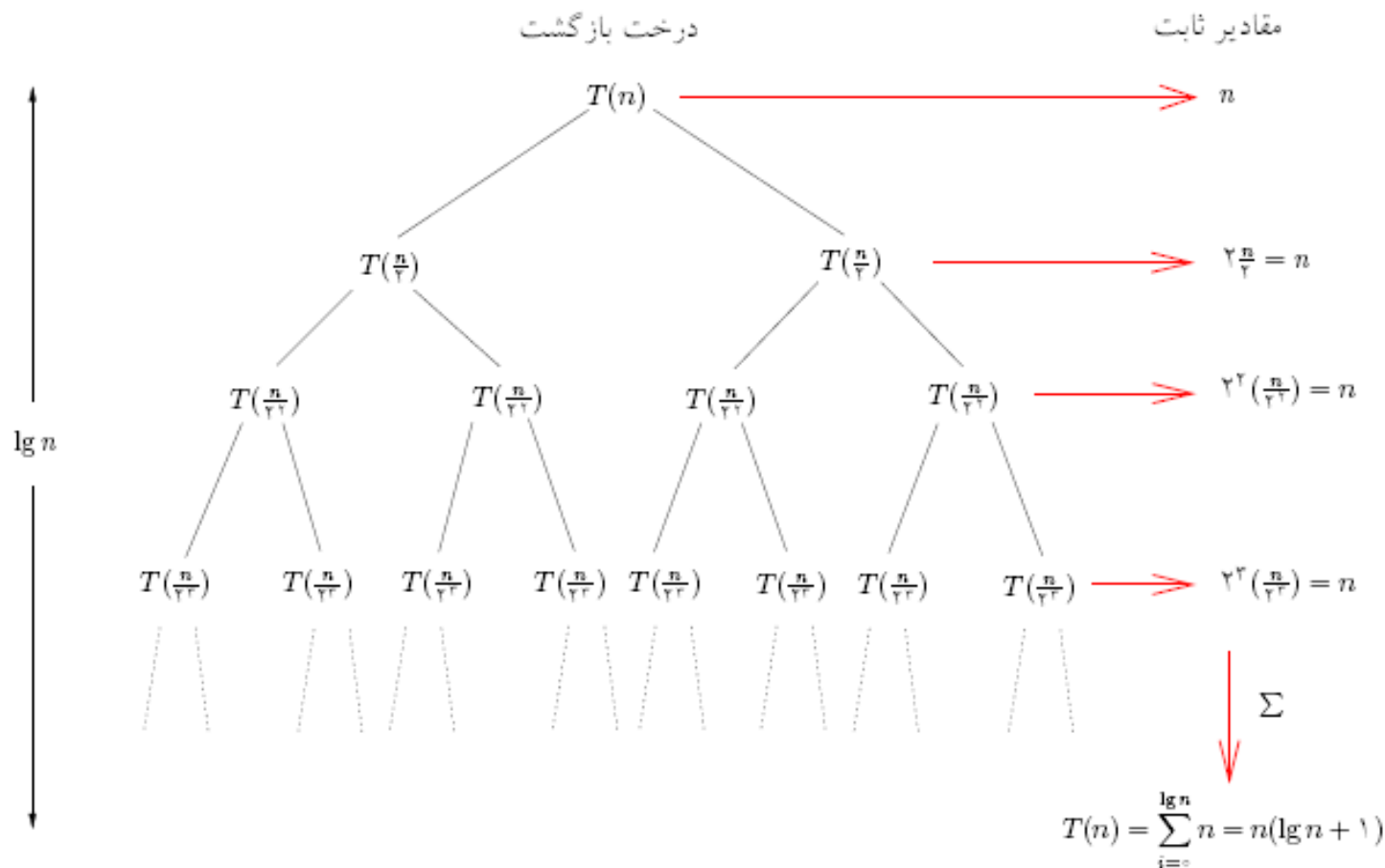
الگوریتم مرتب سازی ادغامی

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + cn$$

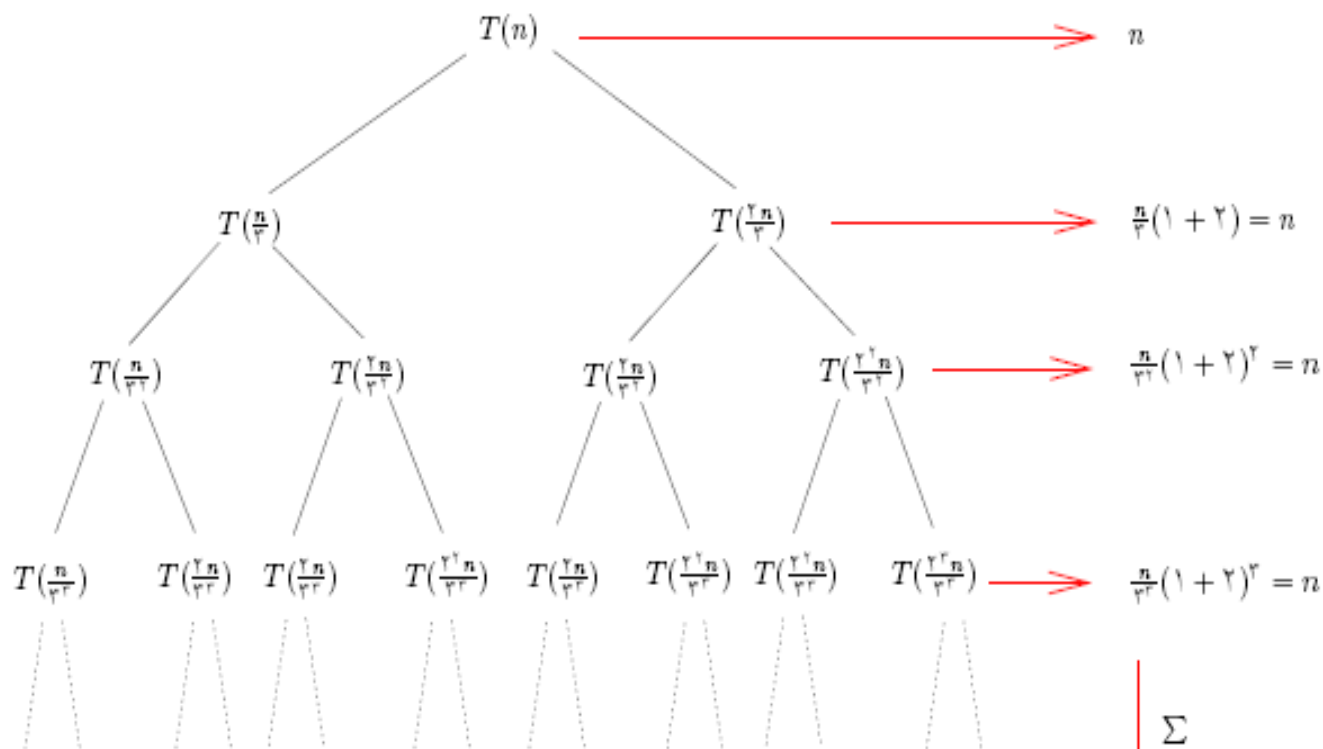
$$T(n) \in \theta(n \log n)$$

درخت بازگشت (Recursion Tree)

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$



$$T(n) = T\left(\frac{n}{r}\right) + T\left(\frac{r n}{r}\right) + n$$



$$T(n) < \sum_{i=0}^{\lg n} n = n(\lg n + 1)$$

حل معادلات بازگشتی (قضیه اصلی)

برای $a \geq 1, b > 1$ و تابع $f(n)$ حل رابطه‌ی بازگشتی $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ (که در آن $\frac{n}{b}$ می‌تواند به صورت کف یا سقف باشد) به قرار زیر است:

اگر G درجه‌ی رشد تابع $g(n) = n^{\log_b a}$ و F درجه‌ی رشد تابع $f(n)$ باشد، خواهیم داشت:

$$(1) \text{ اگر } F > G, T(n) = \Theta(f(n))$$

$$(2) \text{ اگر } G > F, T(n) = \Theta(g(n))$$

$$(3) \text{ اگر } F = G, T(n) = \Theta(g(n) \lg n)$$

حل معادلات بازگشتی (قضیه اصلی)

مثال:

$$T(n) = 5T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + cn$$

$$f(n) = cn$$

$$g(n) = n^{\log_2 5}$$

$$G > F \Rightarrow T(n) \in \theta(n^{\log_2 5})$$

حل معادلات بازگشتی (قضیه اصلی)

مثال:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + cn^{\frac{3}{2}}$$

$$f(n) = cn^{\frac{3}{2}}$$

$$g(n) = n^{\log_4 2}$$

$$F > G \Rightarrow T(n) \in \theta(n^{\frac{3}{2}})$$

حل معادلات بازگشتی (قضیه اصلی)

مثال:

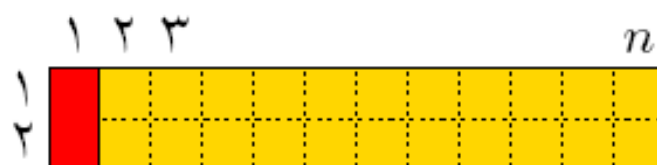
$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{4}\right) + cn^{\frac{3}{2}}$$

$$f(n) = cn^{\frac{3}{2}}$$

$$g(n) = n^{\log_4 8}$$

$$G = F \Rightarrow T(n) \in \theta(n^{\frac{3}{2}} \log n)$$

روابط بازگشتی همگن



به چند طریق می توان صفحه ای $2 \times n$ را با موزاییک های 2×1 فرش کرد؟

حل: اگر جدول $2 \times n$ را بتوان با f_{n+1} روش مختلف فرش کرد، داریم:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

و $f_0 = 0$ و $f_1 = 1$ (دنباله‌ی فیبوناچی).

حل معادلات بازگشتی: معادلات بازگشتی همگن

اگر c_i ها اعدادهای حقیقی باشند، به رابطه‌ی بازگشتی زیر

رابطه‌ی بازگشتی همگن از درجه‌ی k

می‌گوییم:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

تابع $g(n)$ یک جواب دنباله‌ی بازگشتی فوق‌الست، اگر دنباله‌ی $a_n = g(n)$ در $(n \in \mathcal{N})$ در رابطه‌ی بازگشتی صدق کند.

حل معادلات بازگشتی: معادلات بازگشتی همگن

قضیه: اگر $g_i(n)$ ($i = 1, \dots, r$) هر یک جوابی برای

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

باشد، آن گاه هر ترکیب خطی از این r جواب یا

$$A_1 g_1(n) + A_2 g_2(n) + \dots + A_r g_r(n)$$

که در آن A_i ها اعدادی حقیقی اند، پاسخی برای رابطه‌ی بازگشتی است.

حل معادلات بازگشتی: معادلات بازگشتی همگن

را در نظر بگیرید.

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \dots - c_k = 0$$

اگر x_i ریشه‌ی مضاعف درجه p باشد،

$$g(n) = t_0 x^n + t_1 n x^n + t_2 n^2 x^n + \dots + t_{p-1} n^{p-1} x^n$$

جوابی برای رابطه‌ی بازگشتی است.

حل معادلات بازگشتی (معادلات بازگشتی همگن)

مثال:

$$T(n) = 5T(n-1) + 8T(n-2) - 4T(n-3)$$

$$x^3 - 5x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$x^3 - 5x^2 - 8x + 4 = (x-2)^2(x-1)$$

$$T(n) = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n$$

الگوریتم بازگشتی محاسبه اعداد فیبوناچی

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

$$F(1) = F(2) = 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$F(n) = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

مسئله زیرآرایه ماکزیمم

Day	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Price	100	113	110	85	105	102	86	63	81	101	94	106	101	79	94	90	97
Change		13	-3	-25	20	-3	-16	-23	18	20	-7	12	-5	-22	15	-4	7

- بررسی همه بازه های ممکن $\theta(n^2)$

- تبدیل مسئله، به مسئله زیرآرایه ماکزیمم

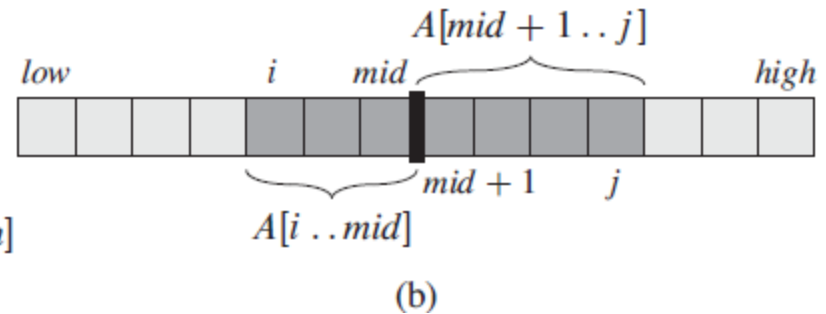
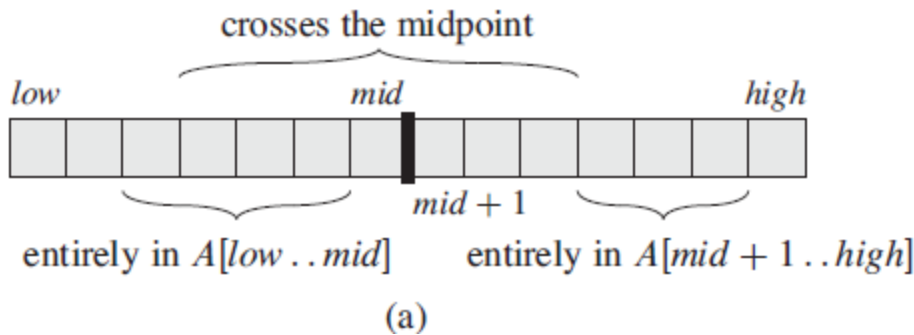
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	13	-3	-25	20	-3	-16	-23	18	20	-7	12	-5	-22	15	-4	7

maximum subarray

- بررسی همه بازه های ممکن $\theta(n^2)$
- استفاده از روش تقسیم و غلبه

مسئله زیرآرایه ماکزیمم

- استفاده از روش تقسیم و غلبه



- زیر آرایه ماکزیمم در نیمه اول باشد.
- زیر آرایه ماکزیمم در نیمه دوم باشد.
- زیر آرایه ماکزیمم شامل عنصر وسط باشد.

مسئله زیرآرایه ماکزیمم

- استفاده از روش تقسیم و غلبه (یافتن زیر آرایه ماکزیممی که شامل عنصر وسط باشد)

FIND-MAX-CROSSING-SUBARRAY($A, low, mid, high$)

```
1   $left-sum = -\infty$ 
2   $sum = 0$ 
3  for  $i = mid$  downto  $low$ 
4       $sum = sum + A[i]$ 
5      if  $sum > left-sum$ 
6           $left-sum = sum$ 
7           $max-left = i$ 
8   $right-sum = -\infty$ 
9   $sum = 0$ 
10 for  $j = mid + 1$  to  $high$ 
11      $sum = sum + A[j]$ 
12     if  $sum > right-sum$ 
13          $right-sum = sum$ 
14          $max-right = j$ 
15 return ( $max-left, max-right, left-sum + right-sum$ )
```

$\theta(n)$

مسئله زیرآرایه ماکزیمم

FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(*A*, *low*, *high*)

```
1  if high == low
2      return (low, high, A[low])           // base case: only one element
3  else mid =  $\lfloor (\textit{low} + \textit{high}) / 2 \rfloor$ 
4      (left-low, left-high, left-sum) =
          FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(A, low, mid)
5      (right-low, right-high, right-sum) =
          FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(A, mid + 1, high)
6      (cross-low, cross-high, cross-sum) =
          FIND-MAX-CROSSING-SUBARRAY(A, low, mid, high)
7      if left-sum ≥ right-sum and left-sum ≥ cross-sum
8          return (left-low, left-high, left-sum)
9      elseif right-sum ≥ left-sum and right-sum ≥ cross-sum
10         return (right-low, right-high, right-sum)
11     else return (cross-low, cross-high, cross-sum)
```

$$\theta(n \log n)$$

ضرب ماتریس ها

- استفاده از روش مستقیم
- یک روش ساده تقسیم و غلبه
- الگوریتم استراسن

ضرب ماتریس ها

روش مستقیم

SQUARE-MATRIX-MULTIPLY(A, B)

```
1   $n = A.rows$ 
2  let  $C$  be a new  $n \times n$  matrix
3  for  $i = 1$  to  $n$ 
4      for  $j = 1$  to  $n$ 
5           $c_{ij} = 0$ 
6          for  $k = 1$  to  $n$ 
7               $c_{ij} = c_{ij} + a_{ik} \cdot b_{kj}$ 
8  return  $C$ 
```

$$\theta(n^3)$$

ضرب ماتریس ها

یک الگوریتم ساده تقسیم و قله

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21}$$

$$C_{12} = A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22}$$

$$C_{21} = A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21}$$

$$C_{22} = A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22}$$

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + \theta(n^2) \rightarrow \theta(n^3)$$

ضرب ماتریس ها

الگوریتم استراسن

$$S_1 = B_{12} - B_{22}$$

$$S_2 = A_{11} + A_{12}$$

$$S_3 = A_{21} + A_{22}$$

$$S_4 = B_{21} - B_{11}$$

$$S_5 = A_{11} + A_{22}$$

$$S_6 = B_{11} + B_{22}$$

$$S_7 = A_{12} - A_{22}$$

$$S_8 = B_{21} + B_{22}$$

$$S_9 = A_{11} - A_{21}$$

$$S_{10} = B_{11} + B_{12}$$

$$P_1 = A_{11} \cdot S_1 = A_{11} \cdot B_{12} - A_{11} \cdot B_{22} ,$$

$$P_2 = S_2 \cdot B_{22} = A_{11} \cdot B_{22} + A_{12} \cdot B_{22} ,$$

$$P_3 = S_3 \cdot B_{11} = A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{11} ,$$

$$P_4 = A_{22} \cdot S_4 = A_{22} \cdot B_{21} - A_{22} \cdot B_{11} ,$$

$$P_5 = S_5 \cdot S_6 = A_{11} \cdot B_{11} + A_{11} \cdot B_{22} + A_{22} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{22} ,$$

$$P_6 = S_7 \cdot S_8 = A_{12} \cdot B_{21} + A_{12} \cdot B_{22} - A_{22} \cdot B_{21} - A_{22} \cdot B_{22} ,$$

$$P_7 = S_9 \cdot S_{10} = A_{11} \cdot B_{11} + A_{11} \cdot B_{12} - A_{21} \cdot B_{11} - A_{21} \cdot B_{12} .$$

ضرب ماتریس ها

الگوریتم استراسن

$$C_{11} = P_5 + P_4 - P_2 + P_6$$

$$C_{12} = P_1 + P_2$$

$$C_{21} = P_3 + P_4$$

$$C_{22} = P_5 + P_1 - P_3 - P_7$$

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \theta(n^2) \rightarrow \theta(n^{\log_2^7})$$