

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه علوم کامپیوتر

پایان نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

علوم کامپیوتر

پوشش‌های هندسی برای نقاط در حال حرکت

استاد راهنما:

دکتر محمد فرشی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا هوشمند اصل

پژوهش‌گر:

ذریه سلطانی گردفرامری

مهر ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و همه کسانی که درست اندیشیدن را به من آموختند.

سپاس‌گزاری

سپاس خداوند یکتای عزتمندی که رحمت و دانش او در سراسر گیتی گسترده شده، آسمان‌ها و زمین همه از آن اوست و علم و دانش حقیقی را بر هر که بخواهد موهبت می‌فرماید. رحمت و لطف او را بی‌نهایت سپاس می‌گویم چرا که فهم و درک مطالب این پژوهش را بر من ارزانی داشت و مرا به این اصل رساند که علم و ایمان دو بال یک پروازند. توفیق تلاش به من داد و هر بار که خطا کردم فرصتی دوباره، تا با امید، تلاشی تازه را آغاز کنم و به خواست او به نتیجه‌ی مطلوب نائل آیم. به‌راستی که همه چیز از آن اوست و همه‌چیز به خواست اوست.

چکیده

در این پایان‌نامه، $\varepsilon + 1$ -پوشش‌های هندسی برای یک مجموعه از n نقطه در صفحه و در فضای \mathbb{R}^d مورد مطالعه قرار می‌گیرند که این پوشش‌ها می‌توانند زمانی که نقاط آن‌ها حرکت می‌کنند به صورت کارایی نگهداری شوند. پوشش وابسته به حرکت در صفحه، دارای اندازه‌ی $O(n/\varepsilon^2)$ است و با فرض این که نقاط دارای مسیرهای حرکت چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر s هستند، تعداد $O(n^2\beta(n))$ رویداد را بررسی می‌کند (تابع $\beta(n)$ دارای رشدی آهسته‌تر از توابع لگاریتمی است) و پوشش می‌تواند در هر رویداد در زمان $O(1)$ به‌روزرسانی شود. پوشش وابسته به حرکت در فضای \mathbb{R}^d ، دارای اندازه‌ی $O(n/\varepsilon^{d-1})$ و حداکثر درجه‌ی $O(\log^d n)$ است و با فرض این که نقاط دارای مسیرهای حرکت چندجمله‌ای از درجه‌ی محدود هستند، تعداد $O(n^2/\varepsilon^{d-1})$ رویداد را بررسی می‌کند و هر رویداد می‌تواند در زمان $O(\log^{d+1} n)$ ، با استفاده از یک ساختمان داده‌ی کمکی که به $O((n/\varepsilon^{d-1}) \log^d n)$ حافظه نیاز دارد، پردازش شود. به‌روزرسانی یک طرح پرواز نیز تنها به $O(\log n/\varepsilon^{d-1})$ زمان نیاز دارد. علاوه بر این نتایج، این پوشش‌ها اولین $\varepsilon + 1$ -پوشش‌های وابسته به حرکتی هستند که عملکرد آن‌ها به میزان پراکندگی نقاط از هم وابسته نیست.

فهرست مطالب

پ	جدول نمادها
۱	۱ مقدمات
۲	۱.۱ مدل‌های حرکت
۳	۲.۱ دنباله‌ی داوونپورت-شینزل
۵	۳.۱ پوشش‌های هندسی روی مجموعه نقاط
۵	۱.۳.۱ شبکه‌های هندسی
۷	۲.۳.۱ t -پوشش‌های هندسی
۹	۲ یک پوشش هندسی وابسته به حرکت در صفحه
۱۰	۱.۲ کارهای مرتبط
۱۰	۱.۱.۲ تحلیل ضریب کشش و اندازه‌ی پوشش
۱۳	۳ نتیجه‌گیری
۱۵	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۶	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۱۷	مراجع

فهرست تصاویر

۱.۱ پوشش پایینی یک مجموعه از توابع متناظر با دنباله‌ای از نمادها ۴

جدول نمادها

نماد	توضیح	صفحه
$\lambda_s(n)$	طول طولانی‌ترین (n, s) دنباله‌ی داونپورت-شینزل	۴
\mathcal{F}	یک مجموعه از توابع	۴
$\Gamma(\mathcal{F})$	پوشش پایینی مجموعه توابع \mathcal{F}	۴
$\alpha(n)$	معکوس تابع آکرمان	۵

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ مدل‌های حرکت

بسته به کاربرد، حرکت مجموعه نقاط در فضای دلخواه از راه‌های مختلف نمایش داده می‌شود. حرکت می‌تواند به صورت صریح با توابع چندجمله‌ای، به صورت ضمنی با معادلات دیفرانسیلی، یا به صورت آماری با مدل‌های احتمالی نمایش داده شود. همان‌طور که بعداً دیده خواهد شد، در مسائل وابسته به حرکت که نقاط مسئله به‌طور پیوسته در حال حرکت هستند، لازم است تا وضعیت نقاط در هر زمان با مجموعه‌ای از شرط‌های جبری مشخص شود. علاوه بر این نیاز است تا مسیر حرکت نقاط به‌گونه‌ای تعریف شود که تعداد دفعاتی که یک شرط جبری ممکن است نامعتبر شود ثابت باشد. بدین منظور در این پایان‌نامه، فرض می‌شود که مسیر حرکت نقاط در صفحه به صورت **حرکت‌های شبه‌جبری**^۱ است. برای تعریف این نوع حرکت‌ها لازم است توابع شبه‌جبری تعریف شوند، که از تعریف زانگ^۲ مطرح شده در [۹] استفاده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱ توابع پیوسته‌ی یک متغیره‌ی $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ توابع شبه‌جبری از درجه‌ی حداکثر s هستند، هرگاه برای هر تابع چندجمله‌ای m متغیره‌ی g از درجه‌ی s_1 ، تابع

$$h(x) = g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

متحد صفر باشد یا حداکثر $s_1 \times s$ ریشه داشته باشد.

برای نمونه، توابع چندجمله‌ای یا منطقی با درجه‌ی ثابت توابع شبه‌جبری هستند. یک مجموعه از نقاط دارای حرکت‌های شبه‌جبری از زمان هستند هرگاه مسیر حرکت آن‌ها با توابع شبه‌جبری از زمان توصیف شود. در ادامه، تعریف ۱.۱.۱ با شرح یک مثال توضیح داده می‌شود.

مسئله‌ی یک بعدی زیر که ترتیب n نقطه‌ی در حال حرکت روی محور x ها را گزارش می‌کند، در نظر بگیرید. هر نقطه‌ی p_i دارای مسیر حرکت پیوسته‌ای از زمان است که با $f_i(t)$ نشان داده می‌شود و t به زمان اشاره می‌کند. مقدار هر نقطه‌ی p_i در زمان t ، یعنی مولفه‌ی x نقطه، با $v_i(t)$ نشان داده می‌شود. فرض کنید مجموعه توابع حرکت نقاط، یعنی $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ ، توابع شبه‌جبری از درجه‌ی s باشند و شرط‌های جبری برای تعیین موقعیت نقاط متحرک از نوع مقایسه تعریف شوند. اگر برای نشان دادن ترتیب هر دو نقطه‌ی متوالی p_i و p_j روی محور x در زمان t ، به‌طوری‌که $v_j(t) > v_i(t)$ باشد، از شرط جبری $v_j(t) - v_i(t) > 0$ استفاده شود، آنگاه با توجه به تعریف ۱.۱.۱، می‌توان تابع دو متغیره‌ی خطی $g(f_j, f_i)(t) = f_j(t) - f_i(t)$

^۱Pseudo algebraic motions

^۲Zhang

(که طبق تعریف دارای $s_1 = 1$ و $m = 2$ است)، را به عنوان تابع $h(t)$ در نظر گرفت و به این نتیجه رسید که تابع $h(t) = g(f_j, f_i)(t)$ یا متحد صفر است یا دارای حداکثر $1 \times s$ ریشه است. این بدان معنی است که شرط جبری $v_j(t) - v_i(t) > 0$ با گذشت زمان حداکثر به تعداد s بار صفر می‌شود و متعاقباً تغییر علامت می‌دهد (تغییر ترتیب نقاط).

در تحلیل مسائلی که بعداً مطرح خواهند شد، بسیار اهمیت دارد که تعداد دفعاتی که شرط جبری مربوط به یک نقطه با گذشت زمان صفر می‌شود ثابت باشد. از آنجایی که در بیش‌تر مسائل شرط‌های جبری که برای تعیین وضعیت نقاط معرفی می‌شوند، چندجمله‌ای‌هایی از درجه‌ی کم، تعریف شده روی یک تعداد ثابت از نقاط هستند، فرض شبه‌جبری بودن حرکت نقاط کافی است تا برقراری این موضوع را تضمین کند. برای نمونه، در مثال بالا شرط‌های جبری (مقایسه‌ی دو مقدار) از درجه‌ی یک و تعریف شده روی دو نقطه هستند، بنابراین با فرض شبه‌جبری بودن حرکت نقاط، شرط جبری مربوط به یک نقطه همان تابع g مطرح شده در تعریف ۱.۱.۱ می‌شود که حداکثر به تعداد $1 \times s$ بار صفر خواهد شد (s یک عدد ثابت که درجه‌ی توابع شبه‌جبری حرکت را نشان می‌دهد).

۲.۱ دنباله‌ی داونپورت-شینزل

تعریف ۱.۲.۱ یک (n, s) دنباله‌ی داونپورت-شینزل^۳، که n و s اعداد صحیح مثبت هستند، یک دنباله‌ی ساخته شده از n نماد با این خواص است که هیچ دو نماد مجاور در دنباله یکسان نیستند و این‌که برای هر دو نماد مجزای a و b حداکثر s تناوب از آن‌ها در دنباله وجود دارد.

در تعریف بالا، منظور از تناوب a و b این است که نماد b بعد از نماد a و نماد a بعد از نماد b در دنباله ظاهر شود، ولی نه الزاماً مجاور به هم (کنار هم). مثلاً دنباله‌ی زیر، تشکیل شده از نمادهای a, b, c, d را در نظر بگیرید:

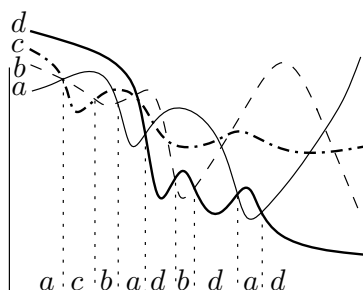
$$\underline{acbdbcacdbacdcadcb}$$

تعداد تناوب‌های a و b در دنباله، یعنی مجموع تعداد دفعاتی که b بعد از a و a بعد از b در دنباله ظاهر شده است، برابر با ۵ است. با توجه به تعریف (n, s) دنباله‌ی داونپورت-شینزل، می‌توان دریافت که با یک n و s معلوم (داده شده)، بسته به مقدارهای n و s ، دنباله‌های داونپورت-شینزل متعددی می‌توان یافت، اما همگی

^۳Davenport-Schinzel sequence

دارای طول‌های متناهی هستند؛ زیرا با توجه به تعریف، امکان وجود دو نماد مجاور یکسان در دنباله نیست و نیز تعداد تناوب‌های هر دو نماد مجزا در دنباله به تعداد حداکثر s محدود شده است. مثلاً برای $n = 3$ و $s = 2$ و نمادهای a, b, c طول $(3, 2)$ دنباله‌های داونپورت-شینزل ممکن، حداکثر ۵ است؛ زیرا هر دنباله با طول ۶ یا بیش‌تر متشکل از این نمادها، یا حداقل برای یک جفت نماد مجزا دارای بیش از ۲ تناوب خواهد بود یا دو نماد مجاور یکسان خواهد داشت و در نتیجه، شرایط تعریف یک $(3, 2)$ دنباله‌ی داونپورت-شینزل را نخواهد داشت، به عنوان مثال دنباله‌ی $abcbab$ که ۳ تناوب از a و b را دارد. بنابراین طول طولانی‌ترین (n, s) دنباله‌ی داونپورت-شینزل قابل تعریف خواهد بود و با $\lambda_s(n)$ نشان داده می‌شود. در ادامه به بیان اهمیت و کاربرد این دنباله‌ها در تحلیل مسائلی مهم در هندسه‌ی محاسباتی پرداخته می‌شود.

اگر $\mathcal{F} = \{f_i\}$ یک مجموعه از توابع باشد، پوشش پایینی^۴ برای مجموعه \mathcal{F} برابر تابع $\min f_i(x)$ است که با $\Gamma(\mathcal{F})$ نشان داده می‌شود. به طور مشابه $\max f_i(x)$ به عنوان پوشش بالایی^۵ تعریف می‌شود. پیچیدگی $\Gamma(\mathcal{F})$ نیز برابر با تعداد دفعاتی که تابع موجود در $\Gamma(\mathcal{F})$ عوض می‌شود، یعنی تعداد نقاط شکست $\Gamma(\mathcal{F})$ تعریف می‌شود.



شکل ۱.۱: پوشش پایینی یک مجموعه از توابع متناظر با دنباله‌ای از نمادها

اگر \mathcal{F} مجموعه‌ای از n تابع چندجمله‌ای با درجه‌ی s باشد. با توجه به این که هر دو تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی s حداکثر در s نقطه با یکدیگر برخورد می‌کنند (این بدان معنی است که حداکثر s تناوب از هر دو تابع مجزا از \mathcal{F} در $\Gamma(\mathcal{F})$ وجود خواهد داشت) و نیز وجود دو تابع یکسان مجاور به هم در $\Gamma(\mathcal{F})$ هم امکان ندارد، به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که $\Gamma(\mathcal{F})$ متناظر با یک (n, s) دنباله‌ی داونپورت-شینزل است و پیچیدگی آن نیز، برابر با طول دنباله‌ی داونپورت-شینزل متناظر با آن خواهد شد. شکل ۱.۱ را ببینید. پس می‌توان گفت که پیچیدگی $\Gamma(\mathcal{F})$ از مرتبه‌ی $O(\lambda_s(n))$ است. تمام نتایج به‌طور مشابه برای پوشش بالایی نیز برقرار

^۴Lower envelope

^۵Upper envelope

است. اگر دامنه‌ی تعریف $\Gamma(\mathcal{F})$ در نظر گرفته شود و هر تابع چندجمله‌ای از \mathcal{F} روی قسمتی از این دامنه (یک بازه مشخص از دامنه) تعریف شود، یعنی نمودار هر تابع تکه‌ای از نمودار آن تابع با دامنه نامحدود باشد، آنگاه پیچیدگی $\Gamma(\mathcal{F})$ برابر $O(\lambda_{s+2}(n))$ می‌شود [۴]. برای یک ثابت $s \geq 3$ ، $\lambda_s(n)$ یک تابع ابرخطی است اما خیلی آهسته رشد می‌کند. در ادامه قضیه‌ای بیان می‌شود که فرمول‌های مربوط به محاسبه $\lambda_s(n)$ را بیان می‌کند. تابع $\alpha(n)$ به معکوس تابع آکرمان^۶ اشاره می‌کند [۴].

قضیه ۲.۲.۱ ([۹]) پیچیدگی پوشش پایینی (یا بالایی) یک مجموعه از n تابع چندجمله‌ای با درجه s برابر $O(\lambda_s(n))$ است، که $\lambda_s(n)$ در روابط زیر صدق می‌کند.

$$\lambda_1(n) = n$$

$$\lambda_2(n) = 2n - 1$$

$$\lambda_3(n) = \Theta(n\alpha(n))$$

$$\lambda_s(n) \leq n 2^{(1+o(1))\alpha(n) \frac{s-2}{s-1}} \quad \text{اگر } n \text{ زوج باشد،}$$

$$\lambda_s(n) \leq n 2^{(1+o(1))\alpha(n) \frac{s-2}{s-1} \log \alpha(n)} \quad \text{اگر } n \text{ فرد باشد،}$$

از آن جایی که $\alpha(n)$ تابعی است که بی‌نهایت آهسته رشد می‌کند (تقریباً برای مقادیر عملی و منطقاً بزرگ n مقدار ثابت است)، بنابراین برای یک مقدار ثابت s ، $\lambda_s(n)$ تقریباً خطی از n است.

۳.۱ پوشش‌های هندسی روی مجموعه نقاط

۱.۳.۱ شبکه‌های هندسی

مجموعه‌ی P شامل n نقطه در فضای \mathbb{R}^d را در نظر بگیرید، یک شبکه‌ی متصل‌کننده‌ی نقاط P ^۷، یک گراف $\mathcal{G} = (P, E)$ با مجموعه رأس‌های P و مجموعه یال‌های $E \subseteq P \times P$ است، به‌طوری‌که هر دو نقطه‌ی

^۶Ackermann function

^۷A network connecting the points of P

$p, q \in P$ با یک مسیر در G به هم متصل می‌شوند. یک شبکه‌ی هندسی^۸ یا یک گراف اقلیدسی^۹، یک گراف وزن‌دار G است که رأس‌ها متناظر با نقاط در فضای اقلیدسی و وزن روی یال‌ها متناظر با فاصله‌ی اقلیدسی بین نقاط انتهایی آن یال است. شبکه‌های هندسی در واقع تعداد زیادی از شبکه‌های حقیقی موجود، مانند شبکه راه‌ها، شبکه مخابرات و غیره را مدل می‌کنند.

برای طراحی یک شبکه برای مجموعه‌ی مشخصی از نقاط، چندین معیار کیفی در نظر گرفته می‌شود. در زیر تعدادی از مهم‌ترین معیارهای کیفی برای ارزیابی شبکه‌های هندسی بیان شده است.

۱. اندازه^{۱۰}، به‌عنوان تعداد یال‌های شبکه تعریف می‌شود. در حالت کلی ترجیح داده می‌شود که شبکه‌ها

تا جای ممکن اندازه‌ی کوچکی (خطی از تعداد نقاط) داشته باشند.

۲. وزن^{۱۱}، به‌عنوان مجموع وزن یال‌های شبکه تعریف می‌شود. از آنجایی که هر شبکه باید تمام نقاط را

به هم وصل کند، در نتیجه وزن آن از پایین با وزن درخت پوشای کمینه کران‌دار می‌شود. وزن یک معیار خوب برای سنجش هزینه‌ی ساخت شبکه است. بنابراین، اغلب شبکه‌هایی با وزن کم مورد نظر هستند.

۳. ضریب کشش^{۱۲} یا تاخیر^{۱۳} برای دو نقطه‌ی داده شده، برابر با نسبت کوتاه‌ترین مسیر (مسیر با وزن

مینیمم) بین دو نقطه در شبکه، به فاصله‌ی آن دو نقطه بر اساس متر تعریف شده برای آن شبکه است

(مثلاً این فاصله در متر اقلیدسی خط مستقیم متصل کننده‌ی دو نقطه است). ضریب کشش یک شبکه

به‌عنوان بیش‌ترین ضریب کشش برای هر جفت از نقاط مجزا در شبکه تعریف می‌شود. در بسیاری از

موارد، نیاز است که ضریب کشش شبکه با یک ثابت کوچک محدود شود (که حداقل باید یک باشد).

شبکه‌ها با ضریب کشش حداکثر t ، t -پوشش‌ها^{۱۴} نامیده می‌شوند.

۴. درجه^{۱۵}، بیش‌ترین تعداد یال‌های مجاور به هر نقطه در شبکه می‌باشد و اغلب نیاز است که با یک ثابت

کوچک محدود شود. درجه‌ی محدود یک شبکه، به اندازه‌ی کوچک آن شبکه اشاره می‌کند، اما برعکس

این مطلب لزوماً درست نیست.

^۸Geometric network

^۹Euclidean graph

^{۱۰}Size

^{۱۱}Weight

^{۱۲}Stretch factor

^{۱۳}Dilation

^{۱۴}t-Spanners

^{۱۵}Degree

در حالت کلی، در زمان طراحی یک شبکه، آنچه که اهمیت زیادی دارد، اعمال ترکیبی از این معیارهای کیفی بر روی شبکه است و در زمان تحلیل شبکه نیز ویژگی‌های شبکه، نسبت به این معیارها سنجیده می‌شود. یکی از مسائل مهم در این زمینه، مطالعه‌ی شبکه‌هایی با ضریب کشش کم است (در ترکیب با دیگر ویژگی‌ها). ازجمله، در بسیاری از کاربردها مانند شبکه‌ی راه‌ها لازم است یک ارتباط سریع (مستقیم) بین هر جفت از نقاط در P برقرار باشد (یعنی شبکه یک گراف کامل باشد) ولی این نیاز به خاطر هزینه‌های بالا، قابل اجرا شدن نیست. بنابراین نیاز به مطالعه‌ی شبکه‌هایی با ضریب کشش کم، منجر به شکل‌گیری مفهوم پوشش‌های هندسی می‌شود. این پوشش‌ها در واقع یک ساختار برای شبکه‌ها، زمانی که ارتباطات کوتاه بین نقاط اهمیت دارند را فراهم می‌کنند.

۲.۳.۱ t -پوشش‌های هندسی

تعریف ۱.۳.۱ مجموعه‌ی P شامل n نقطه در فضای \mathbb{R}^d و $t \geq 1$ را یک عدد حقیقی در نظر بگیرید. یک t -پوشش^{۱۶} برای P ، یک گراف بدون جهت G با مجموعه رأس‌های P است، به‌طوری‌که کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو نقطه‌ی p و q از P ، در G که با نماد $d_G(p, q)$ نشان داده می‌شود، این شرط را داشته باشد:

$$d_G(p, q) \leq t \cdot \|pq\|.$$

هر مسیری که این شرط را برآورده سازد یک t -مسیر^{۱۷} بین p و q نامیده می‌شود.

برای هر عدد حقیقی t' که $t' > t$ است، اگر G یک t -پوشش برای مجموعه نقاط P باشد، بدیهی است که G یک t' -پوشش نیز برای P است. این، منجر به تعریف زیر می‌شود:

تعریف ۲.۳.۱ (ضریب کشش) مجموعه‌ی P شامل n نقطه در فضای \mathbb{R}^d و G را یک گراف اقلیدسی با مجموعه رأس‌های P در نظر بگیرید. ضریب کشش G ، کوچک‌ترین عدد حقیقی t است به‌طوری‌که G یک t -پوشش از P باشد.

گراف کامل یک ۱-پوشش است، اما تعداد مربعی یال دارد. درحقیقت، اگر فرض شود که هیچ سه نقطه‌ای از P روی یک خط قرار ندارند، سپس گراف کامل تنها ۱-پوشش برای P است. بنابراین، در حالت کلی t -پوشش‌ها برای t های بزرگ‌تر از یک بررسی می‌شوند. اما از آنجایی که در بسیاری از کاربردها، پوشش‌هایی با ارتباطات

^{۱۶}t-spanner

^{۱۷}t-path

سریع (ضریب کشش کم) مورد نیاز هستند. بنابراین پوشش‌هایی با ضریب کشش نزدیک به یک، مورد مطالعه قرار می‌گیرند، یعنی $t = 1 + \varepsilon$ ، برای مقادیر ε مثبت و کوچک ($0 < \varepsilon < 1$). به این ترتیب، می‌توان با انتخاب مقادیر خیلی کوچک برای ε ، مقدار t را به یک نزدیک کرد، یعنی t -پوشش را به یک ۱-پوشش (گراف کامل) نزدیک کرد.

فصل ۲

یک پوشش هندسی وابسته به حرکت در صفحه

در این فصل یک $\varepsilon + 1$ -پوشش ساده با اندازه‌ی خطی، برای یک مجموعه از n نقطه در صفحه معرفی می‌شود. این پوشش زمانی که نقاط آن حرکت می‌کنند، می‌تواند به‌صورتی کارا نگهداری شود. فرض می‌شود که مسیر حرکت نقاط با توابع شبه‌جبری از درجه‌ی حداکثر s توصیف می‌شوند (بخش ۱.۱ را ببینید). لازم به ذکر است که مطالب این فصل بر اساس مقاله‌ی آبام^۱ و همکارانش [۲] تنظیم شده است.

۱.۲ کارهای مرتبط

یک $\varepsilon + 1$ -پوشش را در نظر بگیرید. برای جزئیات بیش‌تر در مورد پوشش‌ها می‌توانید بخش ۳.۱ را ببینید. هنگامی که نقاط پوشش دارای حرکت پیوسته‌ای از زمان باشند، پوشش به‌طور پیوسته از زمان تغییر می‌کند، اما تنها در لحظه‌های مشخصی نیاز به به‌روزرسانی خواهد داشت، تا همچنان در تمام زمان‌ها یک $\varepsilon + 1$ -پوشش باقی بماند. در فصل ۲ بیان شد که این لحظات رویداد نامیده می‌شوند. از آنجایی که کارایی و پاسخ‌گویی، از مهم‌ترین معیارها برای ارزیابی کیفیت ساختارهای وابسته به حرکت هستند، هدف، طراحی پوششی است که تعداد رویدادها و نیز زمان پاسخ‌گویی آن، کم باشد. همان‌طور که در فصل ۲ بیان شد، در حالت ایده‌ال، تعداد رویدادها باید نزدیک به کم‌ترین تعداد رویدادهایی که برای نگهداری ساختار لازم است باشد. برای پوشش‌ها، این بدین معنی است که تعداد رویدادها باید $O(n^2)$ باشد؛ زیرا مجموعه‌های n تایی از نقاط که به‌صورت خطی در صفحه حرکت می‌کنند وجود دارند، که برای هر $\varepsilon + 1$ -پوشش باید $\Omega(n^2/(1+\varepsilon)^2)$ رویداد پردازش شود [۴]. زمان پاسخ‌گویی نیز در حالت ایده‌ال باید چندلگاریتمی باشد.

۱.۱.۲ تحلیل ضریب کشش و اندازه‌ی پوشش

در این زیربخش ثابت خواهد شد که اگر زاویه‌های ϕ و φ به‌گونه‌ای انتخاب شوند که شرط‌های

$$(\cos \phi - \sin \phi) \geq 1/(1+\varepsilon) \quad (1-2)$$

و

$$(\sin(\phi/2)/\sin(\varphi/2)) \geq 1 + 2/\varepsilon \quad (2-2)$$

برقرار باشند، آنگاه $DDS(P)$ یک $\varepsilon + 1$ -پوشش برای مجموعه نقاط P خواهد بود. این شرط‌ها می‌توانند با تنظیم زوایای ϕ و φ به‌صورت $\phi = \arcsin \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$ و $\varphi = 2 \arcsin \frac{\varepsilon^2}{4(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)}$ به‌دست آیند. همواره فرض

^۱Abam

می شود که $\phi < \varphi$.

مشاهده ۱.۱.۲ اگر $\phi = \arcsin \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$ برقرار باشد آنگاه $0 < \phi < \frac{\pi}{6}$.

اثبات. از آن جایی که، $\frac{1}{2} < \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$ و تابع \arcsin در بازه $(0, \pi/2)$ یک تابع صعودی است، بنابراین،

$$0 < \phi = \arcsin \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} < \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

□

مشاهده ۲.۱.۲ با انتخاب $\phi = \arcsin \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$ و $\varphi = 2 \arcsin \frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)}$ دو شرط ۱-۲ و ۲-۲ برقرار است.

اثبات. قسمت اول اثبات: با توجه به مشاهده ۱.۱.۲، رابطه $0 < \phi < \frac{\pi}{6}$ برقرار است، بنابراین رابطه $\cos \phi \geq 1 - \sin \phi$ نیز برقرار خواهد بود و شرط ۱-۲ به این صورت اثبات می شود:

$$\phi = \arcsin \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$$

$$\sin \phi = \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$$

$$2 \sin \phi - 1 = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} - 1$$

$$1 - 2 \sin \phi = \frac{1}{1+\varepsilon}$$

$$1 - \sin \phi - \sin \phi = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

$$\cos \phi - \sin \phi \geq \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

قسمت دوم اثبات: از مشاهده ۱.۱.۲، رابطه $1 < \cos(\phi/2) < \frac{1}{2}$ و از قسمت اول اثبات، رابطه $\sin \phi =$

برقرار است. با توجه به این روابط و نیز رابطه مثلثاتی $\sin \phi = 2 \sin(\phi/2) \cos(\phi/2)$ ، شرط

۲-۲ به این صورت اثبات می شود:

$$\varphi = \mathfrak{V} \arcsin \frac{\varepsilon^{\mathfrak{V}}}{\mathfrak{V}(\varepsilon + \mathfrak{V})(1 + \varepsilon)}$$

$$\sin(\varphi/\mathfrak{V}) = \frac{\varepsilon^{\mathfrak{V}}}{\mathfrak{V}(\varepsilon + \mathfrak{V})(1 + \varepsilon)}$$

$$\sin(\varphi/\mathfrak{V}) \cos(\phi/\mathfrak{V}) \leq \frac{\varepsilon^{\mathfrak{V}}}{\mathfrak{V}(\varepsilon + \mathfrak{V})(1 + \varepsilon)}$$

$$\frac{1}{\sin(\varphi/\mathfrak{V}) \cos(\phi/\mathfrak{V})} \geq \frac{\mathfrak{V}(\varepsilon + \mathfrak{V})(1 + \varepsilon)}{\varepsilon^{\mathfrak{V}}}$$

$$\frac{\frac{\varepsilon}{\mathfrak{V}(1 + \varepsilon)}}{\sin(\varphi/\mathfrak{V}) \cos(\phi/\mathfrak{V})} \geq \frac{\mathfrak{V}(\varepsilon + \mathfrak{V})}{\varepsilon}$$

$$\frac{\sin \phi}{\mathfrak{V} \sin(\varphi/\mathfrak{V}) \cos(\phi/\mathfrak{V})} \geq \frac{\varepsilon + \mathfrak{V}}{\varepsilon}$$

$$\frac{\sin(\phi/\mathfrak{V})}{\sin(\varphi/\mathfrak{V})} \geq 1 + \mathfrak{V}/\varepsilon.$$

□

فصل ۳

نتیجه‌گیری

هدف از این پایان نامه، مطالعه‌ی ساختارهای وابسته به حرکت، پوشش‌های هندسی و ترکیب این دو مفهوم برای داشتن پوشش‌های وابسته به حرکتی کارا بود. اهمیت مطالعه‌ی این نوع پوشش‌ها به خاطر کاربردهایی است که شبکه‌های متحرک (از جمله شبکه‌های همراه، بی‌سیم و غیره) در دنیای امروز ما دارند.

در این پایان نامه پوشش‌های وابسته به حرکت جدیدی در صفحه و نیز در فضای \mathbb{R}^d تحت این فرض که نقاط پوشش دارای مسیرهای حرکت شبه‌جبری از درجه‌ی محدود هستند، معرفی شدند. این پوشش‌ها دارای اندازه‌ی خطی از تعداد نقاط هستند و علاوه بر دارا بودن مهم‌ترین معیارهای ارزیابی کیفیت ساختارهای وابسته به حرکت، یعنی کارایی و پاسخ‌گویی، این ویژگی بارز را نیز دارند که اولین $\varepsilon + 1$ -پوشش‌هایی هستند که تعداد رویدادها و زمان پاسخ‌گویی آن‌ها، به میزان پراکندگی نقاط از هم وابسته نیست.

هرچند که دو پوشش معرفی شده در فصل ۴ و ۵ دارای خواص ذکر شده در بالا هستند، اما پوشش ارائه شده در فصل ۵ برتری‌هایی نسبت به پوشش ارائه شده در فصل ۴ دارد، از جمله این‌که: جامع‌تر است و برای نقاط در فضای \mathbb{R}^d ($d \geq 2$) است، ساختار وابسته به حرکت پوشش محلی است و وابستگی آن به ε نیز کم‌تر است.

این پوشش‌ها مهم‌ترین معیارها و ویژگی‌های مورد نظر را دارند، اما متأسفانه، وزن آن‌ها می‌تواند از وزن درخت پوشای کمینه‌ی مجموعه نقاط P ، که با نماد $wt(MST(P))$ نشان داده می‌شود، خیلی بیش‌تر شود. بنابراین معرفی یک $\varepsilon + 1$ -پوشش وابسته به حرکت کارا که وزن کل آن از مرتبه‌ی $O(wt(MST(P)))$ باشد، به عنوان مسئله‌ای برای کارهای تحقیقاتی آینده باقی می‌ماند.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Join	الحاق
Size	اندازه
On-line	بر-خط
Largest empty circle	بزرگ‌ترین دایره‌ی خالی
Responsiveness	پاسخ‌گویی
Full	پر
Spread	پراکندگی
Query	پرسش
Spanner	پوشش
Upper envelope	پوشش بالایی
Lower envelope	پوشش پایینی
Diamond-Delaunay spanner	پوشش لوزی-دلونی
Kinetic spanner	پوشش وابسته به حرکت

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Ackermann function	تابع آکرمان
Active	فعال
Bisector	منصف
Canonical subset	زیرمجموعه‌ی کانونی
Canonical cones	مخروط‌های کانونی
Certificate	تاییدیه
Closest pair	نزدیک‌ترین جفت
Configuration function	تابع وضعیت
Compactness	فشردگی
Cone-Separated Pairs Decomposition	تجزیه‌ی جفت‌های مخروط-مجزا
Convex	محدب
Convex distance function	تابع فاصله‌ی محدب

مراجع

- [1] M. A. Abam and M. de Berg. Kinetic spanners in \mathbb{R}^d . *Discrete Comput. Geom.*, 45:723–736, June 2011.
- [2] M. A. Abam, M. de Berg, and J. Gudmundsson. A simple and efficient kinetic spanner. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 43:251–256, April 2010.
- [3] J. Basch and L. J. Guibas. Data structures for mobile data. *J. Algorithms*, 31:1–28, April 1999.
- [4] M. Sharir and P. K. Agarwal. *Davenport-Schinzel sequences and their geometric applications*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1996.

Abstract

In this thesis, we study $1 + \varepsilon$ -spanners for a set of n points in the plane and in d -dimensional Euclidean space that can be maintained efficiently as the points move. The kinetic spanner in the plane has size $O(n/\varepsilon^2)$. Assuming the trajectories of the points can be described by polynomials whose degrees are at most s , the number of events is $O(n^2\beta(n))$ ($\beta(n)$ grows slower than logarithmic functions), and at each event the spanner can be updated in $O(1)$ time. The kinetic spanner in \mathbb{R}^d has size $O(n/\varepsilon^{d-1})$ and maximum degree $O(\log^d n)$. Assuming that the trajectories of the points can be described by bounded-degree polynomials, the number of events is $O(n^2/\varepsilon^{d-1})$, and using a supporting data structure of size $O((n/\varepsilon^{d-1}) \log^d n)$, we can handle events in time $O(\log^{d+1} n)$. Moreover, the spanner can be updated in time $O(\log n/\varepsilon^{d-1})$ if the flight plan of a point changes. These spanners are the first kinetic spanners whose performance does not depend on the spread of the point set.

Yazd University

Faculty of Mathematics

Department of Computer Science

Thesis submitted

for the degree of Master of Science

Title:

Geometric Spanners for Mobile Points

Supervisor:

Dr. Mohammad Farshi

Advisor:

Dr. Mohammad Reza Hooshmand Asl

By:

Zorieh Soltani Gerdefaramarzi

October, 2011