توپولوژی

مهدی امیدعلی

فهرست مطالب

مقدمه

توپولوژی (topology book)عمومی قسمتی از ریاضیات نوین است که به بررسی مفاهیم پیوستگی و گذر به حد در بالاترین سطح مجرد است. مفاهیم فضاهای توپولوژیک و توابع پیوسته در ۱۹۱۴ توسط‌هاسدورف ارائه شد.

یکی از مسایل بنیادی توپولوژی ارائه و بررسی ناورداهای توپولوژیک است که ویژگی‌هایی هستند که توسط همیومورفیسم‌ها پایدار می‌مانند. ناورداهای توپولوژیک لازم نیست که حتماً عدد باشند. به عنوان مثال همبندی، فشردگی، و متریک‌پذیری ناورداهای غیرعددی هستند. در عوض ناورداهای بعد ناورداهایی هستند که مقدار عددی دارند

Let $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$, where $h_1, h_2, \ldots, h_m$ are distinct, and let x be an element of G. Then the left coset xH consists of the elements xh_j متن فارسیfor $j = 1, 2, \ldots, m$. Suppose that j and k are integers between 1 and m for which $xh_j = xh_k$. Then $h_j = x^{-1}(xh_j) = x^{-1}(xh_k) = h_k$, and thus $j = k$, since $h_1, h_2, \ldots, h_m$ are distinct. It follows that the elements $xh_1, xh_2, \ldots, xh_m$ are distinct. We conclude that the subgroup H and the left coset xH both have m elements, as required.

دسته‌هایی از فضاهای توپولوژیک را ناورداهای توپولوژیک خاص معرفی می‌کنند. مهمترین آنها عبارتند از فضاهای متریک‌پذیر، فضاهای دارای پایه شمارش‌پذیر، و فضاهای فشرده.

فصل ۱

فضاهای توپولوژیک و توابع پیوسته

۱.۱ فضاهای توپولوژیک

تعریف. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. منظور از یک توپولوژی روی X عبارت است از مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X مانند T که دارای شرایط زیر باشد:

(۱) $\emptyset, X \in T$.

(۲) اجتماع هر تعداد دلخواه از عناصر T در T باشد.

(۳) اشتراک تعداد متناهی از عناصر T در T باشد.

اعضای T را باز می‌نامیم. بنابراین شرایط بالا به این گونه قابل بازگویی است که

(۱) $\emptyset$ و X باز هستند.

(۲) اجتماع دلخواه بازها باز است.

(۳) اشتراک متناهی بازها باز است.

مثال. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. زیرمجموعه U از X را باز اعلام می‌کنیم اگر $X - U$ یا تهی باشد، یا X باشد، و یا شمارا باشد. به سادگی دیده می‌شود که این بازها تشکیل یک توپولوژی روی X می‌دهند که به آن توپولوژی متمم متناهی می‌گوییم.

بنابراین توپولوژی‌های مختلفی می‌توان روی یک مجموعه بنا نهاد. **مسائل**

۱. نشان دهید فضای X گسسته است اگر و تنها اگر هر نقطه آن تنها باشد.

۲. فرض کنید X یک مجموعه باشد و T متشکل از $\emptyset$ و X و تمام زیرمجموعه‌های $U \subseteq X$ باشد بطوریکه $X - U$ شمارا باشد. ثابت کنید T یک توپولوژی است که به آن توپولوژی متمم شمارا می‌گوییم.

۳. ثابت کنید اشتراک هر خانواده دلخواه از توپولوژی‌ها روی X خود یک توپولوژی روی X است.

۲.۱ پایه

تعریف. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. زیرمجموعه B از بازها را یک پایه می نامیم هرگاه هر زیرمجموعه باز از X را بتوان به صورت اجتماعی از عناصر B نوشت. مجموعه E از بازها را یک زیرپایه می نامیم هرگاه مجموعه متشکل از تمام اشتراک‌های متناهی از عناصر E یک پایه باشد.

به عنوان مثال خود T یک پایه برای خودش است. اهمیت مفهوم پایه در این است که به راحتی می‌توان یک توپولوژی را با استفاده از یک پایه آن معرفی کرد. همچنین تقریباً تمامی ویژگی‌های فضاهای توپولوژیک و توابع پیوسته بین آنها را می‌توان تنها بر اساس پایه‌ها بیان کرد. قضیه زیر شرط مفیدی را معرفی می‌کند که بوسیله آن می‌توان توپولوژی‌های متنوعی را روی یک مجموعه بنا نهاد.

گزاره ۱.۲.۱. *فرض کنید X یک مجموعه باشد و B یک مجموعه از زیرمجموعه‌های X باشد. در این صورت B پایه ای برای یک توپولوژی روی X است اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشند:*

(۱) اجتماع عناصر B برابر با X باشد، به عبارتی $\bigcup B = X$.

(۲) برای هر $U, V \in B$ و هر $x \in U \cap V$، مجموعه $W \in B$ موجود باشد بطوریکه $x \in W \subseteq U \cap V$. (به بیان دیگر اشتراک هر دو عضو از B را بتوان به صورت اجتماعی از عناصر B نوشت)

بعلاوه، B با شرایط بالا تنها و تنها یک توپولوژی را مشخص می‌کند.

مثال. فرض کنید R مجموعه اعداد حقیقی باشد. برای هر دو عدد حقیقی a, b قرار می دهیم

$$(a,b) = \{x | a < x < b\}$$

و آنرا یک بازه می نامیم. بوضوح اشتراک هر دو بازه خود یک بازه است و اجتماع تمام بازه‌ها برابر با کل R است. بنابراین مجموعه تمام بازه‌ها یک پایه برای یک توپولوژی روی R است که به آن توپولوژی عادی یا اقلیدسی می گوییم.

۳.۱ مجموعه‌های بسته

تعریف. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. زیرمجموعه A از X را بسته می نامیم هرگاه $X-A$ باز باشد.

به عنوان مثال در توپولوژی گسسته هر زیرمجموعه بسته است. همچنین در توپولوژی اقلیدسی R هر مجموعه به صورت $[a,b]$ بسته است.

قضیه ۱.۳.۱. *فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت شرایط زیر برقرار است:*

(۱) $\emptyset$ و X بسته هستند.

(۲) اشتراک دلخواه بسته‌ها بسته است.

(۳) اجتماع تعداد متناهی بسته بسته است.

در حقیقت می‌توان یک توپولوژی را با استفاده از بسته‌های آن تعریف کرد که باید در شرایط قضیه بالا صدق کنند.

قضیه ۲.۳.۱. *فرض کنید Y یک زیرفضای X باشد. در این صورت زیرمجموعه B از Y در Y بسته است اگر و تنها اگر بسته A از X موجود باشد بطوریکه $B=A\cap Y$.*

برهان. B در Y بسته است اگر و تنها اگر $Y-B$ در Y باز باشد و این معادل با این است که باز U از X موجود باشد بطوریکه $Y-B=Y\cap U$. اگر $A=X-U$ این مطلب معادل با این است که

$$B=Y-(Y-B)=Y-(Y\cap U)=Y-(Y\cap(X-A))=Y-(Y-A)=Y\cap A.$$

$\square$

توجه داشته باشید که یک زیرمجموعه ممکن است نه باز و نه بسته باشد. همچنین یک زیرمجموعه می‌تواند همزمان هم باز و هم بسته باشد.

۴.۱ توابع پیوسته

مفهوم توابع پیوسته بوسیله مفهوم چسبیدگی بسیار شهودی و طبیعی است اما در عمل شرط مناسب‌تر اما غیر شهودی وجود دارد که اغلب این شرط به عنوان تعریف یک تابع پیوسته ارائه می‌شود. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک، $x\in X$ و $A\subseteq X$ باشند. x را چسبیده به A می‌نامیم هرگاه $x\in\overline{A}$. چسبیده بودن x به A را با $x\delta A$ نمایش می‌دهیم.

تعریف. فرض کنید (X, T_1) و (Y, T_2) دو فضای توپولوژیک باشند. تابع $f : X \to Y$ را پیوسته می‌نامیم هرگاه f حافظ چسبیدگی باشد، به بیان دیگر

$$\forall x \in X, \forall A \subseteq X : x\delta A \Rightarrow f(x)\delta f(A).$$

قضیه ۱.۴.۱. *فرض کنید $f : X \to Y$ تابعی بین دو فضای توپولوژیک باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:*

(۱) f پیوسته است.

(۲) به ازای هر $A \subseteq X$ داشته باشیم $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(۳) به ازای هر بسته $P \subseteq Y$ زیرمجموعه $f^{-1}(P)$ بسته باشد.

(۴) به ازای هر باز $U \subseteq Y$ زیرمجموعه $f^{-1}(U)$ باز باشد.

(۵) اگر U بازی حول $f(x)$ باشد آنگاه باز V حول x موجود است که $f(V) \subseteq U$.

برهان. (۱)⇔(۲): طبق تعریف پیوستگی و چسبیدگی واضح است.
(۲)⇐(۳): فرض کنید P یک زیرمجموعه بسته از Y باشد. قرار می‌دهیم $A = f^{-1}(P)$، در این صورت

$$P = f(f^{-1}(P)) \subseteq f(\overline{f^{-1}(P)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(P))} = \overline{P} = P.$$

بنابراین

$$P = f(\overline{f^{-1}(P)})$$

و از اینجا

$$\overline{A} = \overline{f^{-1}(P)} \subseteq f^{-1}\Big(f(\overline{f^{-1}(P)})\Big) = f^{-1}(P) = A,$$

یعنی $A = f^{-1}(P)$ بسته است.
(۳)⇐(۴): فرض کنید U در Y باز باشد. در این صورت $P = Y - U$ بسته است و بنابراین $f^{-1}(U) = X - f^{-1}(P)$ باز است.
(۴)⇐(۵): فرض کنید U بازی حول $f(x)$ باشد. در این صورت $V = f^{-1}(U)$ باز است و شامل x.
(۵)⇐(۲): فرض کنید $x \in \overline{A}$ ولی $f(x) \notin \overline{f(A)}$. در این صورت $U = Y - \overline{f(A)}$ یک باز حول $f(x)$ است و بنابراین باز V حول x موجود است که $f(V) \subseteq U$. ولی V شامل نقطه‌ای از A است که تناقض است زیرا تصویر این نقطه باید به مجموعه $f(A) \subseteq f(\overline{A})$ متعلق باشد. □