

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه علوم کامپیوتر

پایان نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

علوم کامپیوتر

روش‌های ساخت تجزیه نقاط به زوج‌های نیم-مجزا و کاربردهای آنها

استاد راهنما:

دکتر محمد فرشی

استاد مشاور:

دکتر مهدیه هاشمی نژاد

پژوهش‌گر:

فرزانه ایزدی

مهر ۱۳۹۲

کلیه‌ی حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه/رساله متعلق به دانشگاه یزد است و هرگونه استفاده از نتایج علمی و عملی از این پایان‌نامه/رساله برای تولید دانش فنی، ثبت اختراع، ثبت اثر بدیع هنری، همچنین چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه و اقتباس و ارائه مقاله در سمینارها و مجلات علمی از این پایان‌نامه/رساله منوط به موافقت کتبی دانشگاه یزد است.

تقدیم به

جلوه‌های مهر و عطوفت الهی،

لبخندهای پر مهر زندگیم:

پدر و مادر عزیزم

و همه کسانی که درست اندیشیدن را به من آموختند.

سپاس‌گزاری

مَنّت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت. هر نفسی که فرو می‌رود ممد حیات است و چون برمی‌آید مفرح ذات؛ پس در هر نفس دو نعمت موجود است و بر هر نعمتی شکری واجب.

از دست و زبان که برآید کز عهده‌ی شکرش به درآید.

شکر شایان نثار ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم. بر خود وظیفه می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای ارجمند، جناب آقای دکتر محمد فرشی، تشکر و قدردانی نمایم؛ ایشان در تمام مراحل انجام پایان‌نامه با درایت و دقت‌نظر و به پشتیبانی اندوخته‌های علمی، مرا یاری نمودند؛ بسیار مفتخرم که این دوره را تحت رهنمودهای ارزشمند ایشان به پایان رساندم و از ایشان سپاس‌گزارم. همچنین از زحمات و راهنمایی‌های استاد گرانقدر، سرکار خانم دکتر مهدیه هاشمی‌نژاد، به عنوان مشاور این مجموعه، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

چکیده

برای مجموعه نقاط P در فضای \mathbb{R}^d ، یک تجزیه زوج از P ، مجموعه‌ای مانند \mathcal{W} است که شامل زوج‌هایی از زیرمجموعه‌های P است، به طوری که برای هر دو نقطه $p, q \in P$ ، یک زوج مانند $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathcal{W}$ وجود دارد که $p \in \mathcal{X}$ و $q \in \mathcal{Y}$ یا $q \in \mathcal{X}$ و $p \in \mathcal{Y}$ است. تجزیه نقاط به زوج‌های نیم مجزا، تجزیه زوجی است که در آن فاصله‌ی بین دو مجموعه نقطه در هر زوج، نسبت به ضریبی از قطر مجموعه‌ی کوچک‌تر، بزرگ‌تر است. در این پایان‌نامه، روش‌های ساخت تجزیه نقاط به زوج‌های نیم مجزا برای یک مجموعه از n نقطه در صفحه و در فضای \mathbb{R}^d ، و تعدادی از کاربردهای آن، مورد مطالعه قرار می‌گیرند؛ در جدیدترین روش ساخت، هر نقطه در تعداد کمی زوج ($\mathcal{O}(\log n)$ زوج) ظاهر می‌شود که این ویژگی در روش‌های ساخت قبلی وجود ندارد.

فهرست مطالب

۱	تعاریف و پیش نیازها	۱
۲	۱.۱ غشای محدب یک مجموعه نقاط در صفحه	۱.۱
۳	۲.۱ L_p -متریک‌ها	۲.۱
۵	۳.۱ ساختمان داده‌ها	۳.۱
۵	۱.۳.۱ درخت چهارتایی	۱.۳.۱
۷	۲.۳.۱ درخت نسبت کراندار	۲.۳.۱
۱۲	۴.۱ پوشش‌های هندسی	۴.۱
۱۲	۱.۴.۱ شبکه‌های هندسی	۱.۴.۱
۱۴	۲.۴.۱ t -پوشش‌های هندسی	۲.۴.۱
۱۵	۳.۴.۱ پوشش‌های هندسی با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های محدب	۳.۴.۱
۱۸	۵.۱ بسته‌بندی	۵.۱
۲۱	۶.۱ تجزیه‌ی نقاط به زوج‌های کاملاً مجزا و نیم مجزا	۶.۱
۲۳	۱.۶.۱ زوج مجموعه نقاط کاملاً مجزا و نیم مجزا	۱.۶.۱
۲۷	۲.۶.۱ تجزیه‌ی نقاط به زوج‌های کاملاً مجزا و نیم مجزا	۲.۶.۱
۳۳	۲ ساخت تجزیه نقاط به زوج‌های نیم-مجزا در صفحه	۳۳
۳۴	۱.۲ ساخت تجزیه نقاط به زوج‌های نیم مجزا برای نقاط در صفحه	۱.۲
۳۴	۱.۱.۲ مقدمه	۱.۱.۲

۳۸	ساخت $SSPD$ با استفاده از درخت نسبیت کراندار برای نقاط در صفحه	۲.۱.۲
۳۹	یافتن زوج‌های $SSPD$	۳.۱.۲
۳۹	یافتن زوج‌ها	۴.۱.۲
۴۱	خاصیت یکنواختی $SSPD$ ساخته شده	۵.۱.۲
۴۲	آنالیز وزن و زمان ساخت $SSPD$ محاسبه شده	۶.۱.۲
۵۱	ساخت تجزیه نقاط به زوج‌های نیم-مجزا در فضای \mathbb{R}^d	۳
۵۲	اصول و قضایای مورد نیاز	۱.۳
۵۶	تجزیه‌ی نقاط با پراکندگی محدود به زوج‌های کاملاً مجزا	۲.۳
۵۶	روش ساخت	۱.۲.۳
۵۹	یک روش ساده برای ساخت تجزیه نقاط به زوج‌های نیم-مجزا	۳.۳
۵۹	روش ساخت	۱.۳.۳
۶۲	یک روش بهینه برای ساخت تجزیه نقاط به زوج‌های نیم مجزا	۴.۳
۶۲	روش ساخت	۱.۴.۳
۶۴	خوشه‌بندی مجموعه نقاط	۲.۴.۳
۶۵	آنالیز وزن و زمان ساخت $SSPD$ محاسبه شده	۳.۴.۳
۷۳	کاهش تعداد زوج‌ها در $SSPD$ محاسبه شده	۴.۴.۳
۷۹	کاربردها	۴
۸۰	ساخت یک $(1 + \varepsilon)$ -پوشش	۱.۴
۸۱	ساخت یک $(1 + \varepsilon)$ -پوشش با استفاده از $SSPD$	۱.۱.۴
۸۷	ساخت t -پوشش برای نقاط غیردقیق	۲.۴
۸۸	ساخت $SSPD$ برای مجموعه نقاط غیردقیق	۱.۲.۴
۹۱	ساخت t -پوشش با استفاده از $SSPD$ برای نقاط غیردقیق	۲.۲.۴
۹۲	ساخت t -پوشش برای نقاط، با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های محدب	۳.۴

۱۰۳	۵ نتیجه‌گیری
۱۰۶	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۱۰	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۱۱۴	مراجع

لیست تصاویر

۲	یک مجموعه‌ی محدب در مقایسه با یک مجموعه‌ی غیر محدب.	۱.۱
۳	منحنی ایجاد شده توسط کش پلاستیکی معادل غشای محدب مجموعه‌ای از نقاط.	۲.۱
۴	(الف): دایره‌ی متر اقلیدسی، (ب): دایره‌ی متر L_1 ، (ج): دایره‌ی متر L_∞ .	۳.۱
۶	درخت چهارتایی و مربع‌های متناظر با گره‌ها، برای زیرمجموعه‌ای از نقاط در صفحه.	۴.۱
۱۰	ناحیه‌ی R شامل ۱۵ نقطه، دو برش s_2 و تک برش s_1 ، و زیر ناحیه‌های ایجاد شده.	۵.۱
۱۶	گراف اقلیدسی و گراف باقیمانده پس از حذف رأس‌ها و یال‌های داخل ناحیه‌ی شکست.	۶.۱
۱۷	مربوط به اثبات لم ۴.۴.۱.	۷.۱
۱۸	شکل مربوط به استدلال بسته بندی.	۸.۱
۱۹	حلقه و ناحیه‌ی شکافنده‌ی حلقه در صفحه.	۹.۱
۲۰	مربوط به اثبات لم ۴.۵.۱.	۱۰.۱
۲۲	سه نقطه در صفحه و وضعیت زوج نقاط نسبت به یکدیگر.	۱۱.۱
۲۳	زوج مجموعه نقاط کاملاً مجزای R و S با پارامتر s .	۱۲.۱
۲۶	زوج مجموعه نقاط نیم مجزای R و S با پارامتر s ، با توجه به تعریف اول.	۱۳.۱
۲۶	زوج مجموعه نقاط نیم مجزای R و S با پارامتر s ، با توجه به تعریف دوم.	۱۴.۱
۲۷	زوج مجموعه نقاط نیم مجزای R و S با پارامتر s ، با توجه به تعریف سوم.	۱۵.۱
۳۰	مربوط به لم ۱۰.۶.۱.	۱۶.۱
۳۷	مربوط به اثبات لم ۲.۱.۲.	۱.۲
۴۲	مربوط به اثبات لم ۴.۱.۲.	۲.۲

۴۴	۶.۱.۲	مربوط به اثبات لم	۳.۲
۵۴	$b(p, 2\mu r_{opt})$	شبکه بندی دایره‌ی در صفحه.	۱.۳
۵۹	۳.۳	مربوط به روش ساخت SSPD مطرح شده در بخش	۲.۳
۶۰	P_{out} و P_{in}	چیدمان مجموعه نقاط در شبکه.	۳.۳
۶۳	۴.۳	مربوط به روش ساخت SSPD مطرح شده در بخش	۴.۳
۶۶	۲.۴.۳	مربوط به اثبات لم	۵.۳
۶۹	I	توزیع متغیر تصادفی D_q روی بازه‌ی ، مربوط به اثبات ادعا	۶.۳
۷۴	۹.۴.۳	مربوط به اثبات لم	۷.۳
۸۱	$\psi = 22/5^\circ$	مخروط‌های کانونی در صفحه برای و مخروط انتقال یافته‌ی σ_1 به نقطه‌ی p .	۱.۴
۸۴	۱.۱.۴	مربوط به اثبات قضیه‌ی	۲.۴
۹۰	۱.۲.۴	مربوط به اثبات لم	۳.۴
۹۱	D_B و D_A	دایره‌های D_B و D_A متناظر با مجموعه نقاط A و B و یال‌های اضافه شده به گراف.	۴.۴
۹۳	θ	مخروط‌های کانونی با زاویه‌ی و مرکز O_A	۵.۴
۹۴	۲.۳.۴	مربوط به مشاهده‌ی	۶.۴
۹۵	۳.۳.۴	مربوط به اثبات لم	۷.۴
۹۷	۴.۳.۴	مربوط به اثبات لم	۸.۴
۱۰۰	q_j	یال‌های اضافه شده به پوشش به ازای نقطه‌ی	۹.۴

فصل ۱

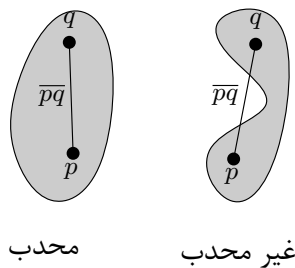
تعاريف و پيش نيازها

در این فصل تعاریف مورد نیاز در این تحقیق بیان می‌گردد، همچنین برخی قضایا و ویژگی‌های مرتبط، مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۱.۱ غشای محدب یک مجموعه نقاط در صفحه

تعریف ۱.۱.۱ یک زیر مجموعه‌ی S از صفحه، محدب^۱ نامیده می‌شود اگر و تنها اگر برای هر جفت نقاط

$p, q \in S$ ، پاره خط \overline{pq} کاملاً در داخل S واقع شود. شکل ۱.۱ را ببینید.



شکل ۱.۱: یک مجموعه‌ی محدب در مقایسه با یک مجموعه‌ی غیر محدب.

تعریف ۲.۱.۱ غشای محدب^۲ یک مجموعه‌ی S ، کوچک‌ترین مجموعه‌ی محدبی است که S را دربر

می‌گیرد و با $CH(S)$ نشان داده می‌شود.

غشای محدب در واقع اشتراک تمام مجموعه‌های محدبی است که S را در بر می‌گیرند. برای درک

بهتر غشای محدب یک مجموعه‌ی متناهی P با n نقطه در صفحه، می‌توان تصور کرد که نقاط، میخ‌هایی

هستند که در صفحه کوبیده شده‌اند، و غشای محدب P ، منحنی ایجاد شده توسط کش پلاستیکی است

که دور میخ‌ها انداخته شده است. شکل ۲.۱ را ببینید. این دیدگاه منجر به تعریف دیگری از غشای محدب

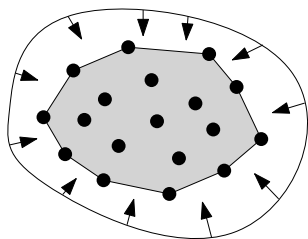
می‌شود: چند ضلعی محدب یکتایی که رأس‌هایش نقاطی از P هستند و سایر نقاط P را دربر می‌گیرد.

قضیه ۳.۱.۱ ([۱۰]) غشای محدب یک مجموعه شامل n نقطه در صفحه، در زمان $O(n \log n)$ قابل

محاسبه است.

^۱Convex

^۲Convex Hull



شکل ۲.۱: منحنی ایجاد شده توسط کش پلاستیکی معادل غشای محدب مجموعه‌ای از نقاط.

قضیه ۴.۱.۱ ([۲۲]) فرض کنید P مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه، و $\mathcal{CH}(i)$ غشای محدب مجموعه نقاط $p_1, \dots, p_i \in P$ است. با اضافه شدن نقطه‌ی p_{i+1} می‌توان غشای محدب $\mathcal{CH}(i+1)$ را با به‌روزرسانی $\mathcal{CH}(i)$ و بدون محاسبه‌ی مستقیم غشای محدب برای مجموعه نقاط p_1, \dots, p_{i+1} محاسبه کرد. این کار، از طریق ایجاد دو مماس مشترک از نقطه‌ی p_{i+1} به روی غشای محدب $\mathcal{CH}(i)$ در زمان $\mathcal{O}(\log n)$ قابل اجرا است.

۲.۱ L_p -متریک‌ها

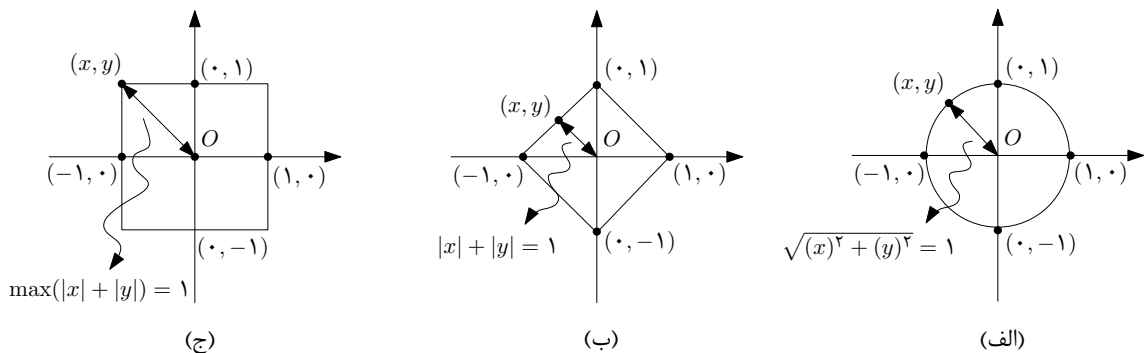
فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}^d$ دو نقطه باشند؛ فاصله‌ی L_p -متریک^۳ بین دو نقطه‌ی a و b به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(a, b) = \left(\sum_{i=1}^d |a_i - b_i|^p \right)^{1/p}.$$

در ادامه، L_p -متریک‌ها در صفحه (فضای \mathbb{R}^2) بررسی می‌شوند. فرض کنید a نقطه‌ای در صفحه باشد؛ مختصات طولی نقطه‌ی a با $x(a)$ و مختصات عرضی آن با $y(a)$ نشان داده می‌شود. L_2 -متریک همان فاصله اقلیدسی است. فاصله اقلیدسی بین دو نقطه‌ی a و b را با $\|ab\|$ نشان می‌دهند و برابر است با:

$$\|ab\| = \left(|x(a) - x(b)|^2 + |y(a) - y(b)|^2 \right)^{1/2}.$$

^۳ L_p -metric



شکل ۳.۱: (الف): دایره‌ی متر اقلیدسی، (ب): دایره‌ی متر L_1 ، (ج): دایره‌ی متر L_∞ .

فاصله‌ی L_∞ -متریک بین دو نقطه‌ی a و b در صفحه، با $\|ab\|_\infty$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|ab\|_\infty = \max \left\{ |x(a) - x(b)|, |y(a) - y(b)| \right\}.$$

همین‌طور فاصله‌ی L_1 -متریک بین دو نقطه‌ی a و b در صفحه، برابر است با:

$$|x(a) - x(b)| + |y(a) - y(b)|.$$

برای معرفی هر L_p -متریک، یک شکل واحد وجود دارد. مبدأ مختصات را در نظر بگیرید، مکان هندسی تمام نقاطی که دارای فاصله‌ی L_p -متریک یک از مبدأ هستند، یک شکل هندسی واحد را برای آن متر تعریف می‌کنند. مثال شناخته شده‌ی آن، شکل واحد دایره به مرکز مبدأ در متر اقلیدسی (L_2 -متریک) است، که فاصله‌ی اقلیدسی تمام نقاط روی مرز دایره، تا مبدأ مختصات برابر با یک است. شکل ۳.۱ قسمت (الف) را ببینید. به راحتی برای سایر L_p -متریک‌ها نیز این شکل واحد به دست می‌آید، که در اصطلاح به عنوان دایره‌ی هر L_p -متریک شناخته می‌شود. شکل ۳.۱ قسمت (ب) و (ج)، به ترتیب دایره‌ی L_1 -متریک و L_∞ -متریک را نشان می‌دهد. در ادامه‌ی پایان‌نامه، فاصله با متر اقلیدسی (L_2 -متریک) در نظر گرفته می‌شود، مگر در حالت‌های خاص که متر استفاده شده ذکر می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱ یک فضای متریک^۴، زوجی به صورت (S, δ) است، که S مجموعه‌ای (متناهی یا غیر متناهی) از نقاط، و δ تابع فاصله به صورت $\delta : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ است که به ازای هر دو نقطه مانند

^۴Metric Space

$p, q \in S$ فاصله $\delta(p, q)$ را نسبت می‌دهد، به طوری که دارای شرایط زیر است:

$$\delta(p, q) \geq 0 \quad (1)$$

$$\delta(p, q) = 0 \text{ اگر و فقط اگر } p = q \quad (2)$$

$$\delta(p, q) = \delta(q, p) \quad (3)$$

$$\delta(p, q) \leq \delta(p, r) + \delta(r, q) \text{ به ازای } p, q, r \in S \text{ (نامساوی مثلثی)}. \quad (4)$$

برای مثال (\mathbb{R}^d, L_2) ، یک فضای متریک است.

تعریف ۲.۲.۱ بعد مضاعف^۵ برای یک فضای متریک متناهی (S, δ) (مجموعه S متناهی است)، عبارت است از کوچک‌ترین مقدار حقیقی و مثبت λ ، به گونه‌ای که هر دایره با شعاع $r > 0$ ، در فضای S ، بتواند با 2^λ دایره با شعاع $r/2$ پوشانده شود.

بعد مضاعف فضای اقلیدسی (\mathbb{R}^d, L_2) ، از مرتبه $\Theta(d)$ است ([۱۶])، به عبارتی می‌توان هر دایره در فضای \mathbb{R}^d و با متر اقلیدسی را، با استفاده از تعداد ثابتی دایره با شعاع نصف پوشاند.

۳.۱ ساختمان داده‌ها

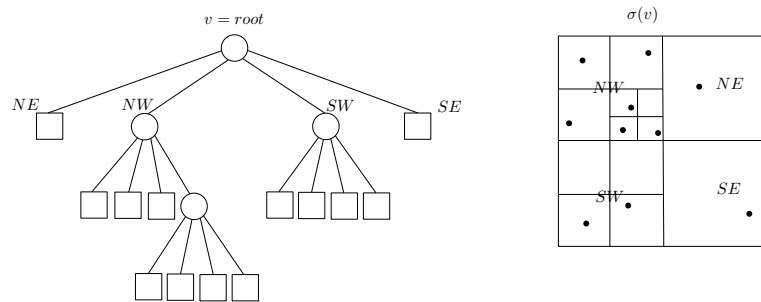
۱.۳.۱ درخت چهارتایی

تعریف ۱.۳.۱ مجموعه نقاط P شامل n نقطه در فضای \mathbb{R}^d را در نظر بگیرید؛ یک **درخت چهارتایی**^۶ برای مجموعه نقاط P ، درختی ریشه‌دار است که هر گرهی داخلی در آن دارای 2^d فرزند است و هر گرهی برگ، حداکثر شامل یک نقطه است. هر گره مانند v در این درخت، متناظر با یک ناحیه به صورت مربع d بعدی است که با $\sigma(v)$ نشان داده می‌شود. اگر گرهی v دارای فرزند باشد (برگ نباشد)، آنگاه مربع‌های متناظر با فرزندان، از تقسیم $\sigma(v)$ توسط d خط موازی با محورهای مختصات ایجاد می‌شوند؛ در نتیجه اجتماع مربع‌های متناظر با برگ‌های درخت، مربع متناظر با ریشه را تشکیل می‌دهد.

^۵Doubling Dimension

^۶Quad Tree

الگوریتم ساخت درخت چهارتایی به این صورت است که اگر P شامل یک نقطه باشد، درخت چهارتایی شامل یک برگ است که مجموعه‌ی P و مربع متناظر، در آن ذخیره می‌شود و اگر P شامل بیش از یک نقطه باشد، ابتدا مستطیل (یا مربع) دربرگیرنده‌ی تمام نقاط که متناظر با ریشه است، با به دست آوردن نقاط مینیمم و ماکزیمم در هر بُعد، حاصل می‌شود و سپس ضلع‌های کوچک مستطیل به اندازه‌ی ضلع بزرگ آن، گسترش یافته و تبدیل به مربع در برگیرنده‌ی نقاط می‌شود. پس از تعیین مربع متناظر با ریشه، الگوریتم به صورت بازگشتی عمل می‌کند و این مربع را تا جایی که در هر زیر مربع بیش از یک نقطه قرار نگیرد، شکاف^۷ می‌دهد. شکاف هر مربع به معنی نصف کردن تمام ضلع‌های مربع و ایجاد 2^d زیرمربع داخل مربع اولیه، است. شکل ۴.۱ مثالی از یک درخت چهارتایی در فضای \mathbb{R}^2 ، و ناحیه‌های مربعی متناظر با گره‌های درخت را نشان می‌دهد. برچسب‌های NE ، NW ، SW و SE ، برچسب‌های استفاده شده برای نمایش مربع‌های متناظر با فرزندان ریشه (گره‌ی v) است، که به ترتیب ربع‌های^۸ شمال شرقی، شمال غربی، جنوب غربی و جنوب شرقی از $\sigma(v)$ را تشکیل می‌دهند.



شکل ۴.۱: درخت چهارتایی و مربع‌های متناظر با گره‌ها، برای زیرمجموعه‌ای از نقاط در صفحه.

تعریف ۲.۳.۱ به ازای مجموعه نقاط P در \mathbb{R}^d ، **پراکندگی**^۹ نقاط P که با $\phi(P)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از نسبت بیش‌ترین فاصله بین دو نقطه از P ، به کمترین فاصله بین دو نقطه‌ی متمایز از آن. به زبان ریاضی:

$$\phi(P) = \left(\max_{p,q \in P} \|pq\| \right) / \left(\min_{p,q \in P, p \neq q} \|pq\| \right).$$

^۷Split

^۸Quadrants

^۹Spread

لم ۳.۳.۱ ([۱۰]) عمق درخت چهارتایی برای مجموعه‌ی نقاط P در \mathbb{R}^d از مرتبه‌ی $\mathcal{O}(\log \phi)$ است.

لم ۴.۳.۱ ([۱۰]) یک درخت چهارتایی برای مجموعه‌ی نقاط P در \mathbb{R}^d در زمان $\mathcal{O}(n \log \phi)$ قابل ساخت است.

۲.۳.۱ درخت نسبیت کراندار

تعریف ۵.۳.۱ (نرخ نسبیت^{۱۰}) برای ناحیه‌ی محدب $R \in \mathbb{R}^d$ ، نرخ نسبیت به صورت

$$\text{Aspect Ratio}(R) = \frac{O_R}{I_R}$$

تعریف می‌شود، که O_R شعاع کوچک‌ترین کره‌ی d بعدی محیطی برای ناحیه‌ی R ، و I_R شعاع بزرگ‌ترین کره‌ی d بعدی محاطی در R است.

ناحیه‌ی چاق

دو تعریف برای ناحیه‌ی چاق ارائه شده است که در این جا مطرح می‌شوند:

تعریف ۶.۳.۱ ([۱۱]) فرض کنید $\alpha > 0$ یک مقدار ثابت است. ناحیه‌ای مانند $R \in \mathbb{R}^d$ را که دارای نرخ نسبیت حداکثر α است، ناحیه‌ی α -چاق^{۱۱} گویند. در صورتی که ناحیه‌ای دارای نرخ نسبیت بیش‌تر از α باشد، آن را ناحیه‌ی α -لاغر^{۱۲} گویند.

تعریف ۷.۳.۱ ([۲۱]) فرض کنید $R \in \mathbb{R}^d$ یک ناحیه، $\alpha > 0$ یک مقدار ثابت، و $V(R)$ نشان دهنده‌ی حجم ناحیه‌ی R است. همچنین U_R را به صورت مجموعه‌ی تمام کره‌های d بعدی، که مرکز آن‌ها در R است ولی R را به طور کامل پوشش نمی‌دهند، در نظر بگیرید؛ گفته می‌شود R ، یک ناحیه‌ی α -چاق است، اگر به ازای هر کره‌ی $S \in U_R$ ، رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$V(R \cap S) \geq V(S)/\alpha.$$

^{۱۰} Aspect Ratio

^{۱۱} α -fat

^{۱۲} Skinny Region

در حقیقت، ناحیه‌ی R می‌بایست حداقل $1/\alpha$ از هر کره‌ی $S \in U_R$ را پوشش دهد. طبق این تعریف، هر چه مقدار α کم‌تر باشد، ناحیه‌ی R چاق‌تر است (در فصل ۲، تأثیر مقدار α را در ویژگی‌های $SSPD$ ساخته شده خواهید دید، به گونه‌ای که هر چه α کم‌تر باشد، وزن، تعداد زوج‌ها و زمان ساخت $SSPD$ کم‌تر خواهد بود). توجه کنید اگر ناحیه‌ای با توجه به تعریف اول α -چاق باشد، آنگاه در تعریف دوم (α^d) -چاق است. این گفته با نوشتن نسبت حجم بین کره‌ی محیطی و محاطی ناحیه، به راحتی قابل اثبات است.

تعریف ۸.۳.۱ مجموعه نقاط P شامل n نقطه در فضای \mathbb{R}^d ، و یک مربع اولیه‌ی d بعدی R ، شامل نقاط P ، را در نظر بگیرید. **درخت نسبیت کراندار**^{۱۳}، یک درخت دودویی افراز کننده‌ی فضا^{۱۴} است، که هر گره در آن متناظر با یک ناحیه است. برای مثال ریشه‌ی این درخت متناظر با مربع R است. در این درخت، ناحیه‌ی متناظر با هر گره‌ی v ، توسط یک برش به دو زیر ناحیه، تقسیم شده و به این ترتیب فرزندان گره‌ی v ، ایجاد می‌شوند. این برش‌ها تا زمانی ادامه می‌یابد که در هر ناحیه، حداکثر یک نقطه از P وجود داشته باشد.

همان گونه که در ادامه توضیح داده می‌شود، در درخت نسبیت کراندار، از صفحات برشی خاصی جهت تقسیم ناحیه‌ها استفاده می‌شود؛ همچنین زیر ناحیه‌های ایجاد شده‌ی (سلول‌ها) متناظر با گره‌های درخت، دارای ویژگی‌های زیر هستند:

- هر سلول یک ناحیه‌ی محدب است.
- هر سلول α -چاق است.
- هر سلول متناظر با یک گره‌ی برگ، شامل حداکثر یک نقطه است.
- درخت دارای حداکثر $O(n)$ گره است.
- عمق درخت $O(\log n)$ است.

^{۱۳}Bounded Aspect Ratio(BAR)-Tree

^{۱۴}Binary Space Partition Tree

ساخت درخت نسبیت کراندار

در این قسمت، نحوه‌ی ساخت درخت نسبیت کراندار، با نرخ نسبیت α و پارامتر تعادل $1 < \beta < 1/2$ ، برای n نقطه در فضای \mathbb{R}^d ، شرح داده می‌شود. اما قبل از آن، مفاهیمی که در الگوریتم ساخت از آن‌ها استفاده می‌شود، در ادامه آورده شده است.

تعریف ۹.۳.۱ ابرصفحه‌ی $s \in \mathbb{R}^d$ ^{۱۵} دارای شیب **کانونی** ^{۱۶} است، اگر بردار نرمال ^{۱۷} آن به فرم $(0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ یا (I_0, I_1, \dots, I_d) به طوری که $I_i \in \{1, -1\}$ باشد. از این صفحه، جهت برش ناحیه‌ها استفاده می‌شود و به آن **برش کانونی** ^{۱۸} گفته می‌شود. برای مثال برش‌های کانونی در فضای \mathbb{R}^2 ، خطوطی هستند که یا موازی با محورهای مختصات X و Y هستند، و یا این‌که با یکی از این محورها تشکیل زاویه‌ی 45° می‌دهند. همچنین یک **ناحیه‌ی کانونی** ^{۱۹} در فضای \mathbb{R}^d ، یک چند وجهی محدب است که هر یک از وجوه آن، دارای شیب کانونی است.

تعریف ۱۰.۳.۱ فرض کنید R یک ناحیه‌ی کانونی α -چاق، شامل n نقطه باشد. منظور از **تک برش** ^{۲۰}، برش کانونی مانند s_1 است که ناحیه‌ی R را به دو زیرناحیه‌ی R_1 و R_2 تقسیم می‌کند به گونه‌ای که:

الف) R_1 و R_2 ، حداکثر $\beta.n$ نقطه دارند،

ب) R_1 و R_2 ، ناحیه‌های α -چاق هستند.

گفته می‌شود ناحیه‌ی R ، **تک برش پذیر** ^{۲۱} است اگر یک تک برش برای R وجود داشته باشد.

^{۱۵}Hyper Plane

^{۱۶}Canonical Slope

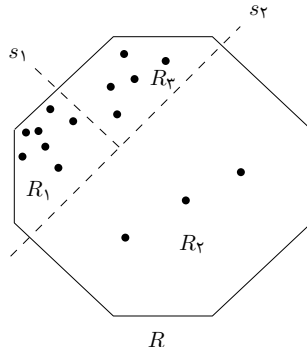
^{۱۷}Normal Vector

^{۱۸}Canonical Cut

^{۱۹}Canonical Region

^{۲۰}One-Cut

^{۲۱}One-Cutable



شکل ۵.۱: ناحیه R شامل ۱۵ نقطه، دو برش s_2 و تک برش s_1 ، و زیر ناحیه‌های ایجاد شده.

تعریف ۱۱.۳.۱ فرض کنید R یک ناحیه کانونی α -چاق، شامل n نقطه باشد. منظور از **دو برش**^{۲۲}، برش کانونی مانند s_2 است که ناحیه R را به دو زیرناحیه R_1 و R_2 تقسیم می‌کند به گونه‌ای که:

(الف) R_1 و R_2 ناحیه‌های α -چاق هستند،

(ب) تعداد نقاط در ناحیه R_2 حداکثر $\beta.n$ است. به عبارتی: $|R_2| \leq \beta|R|$ ،

(ج) $|R_1| \leq \beta|R|$ است، یا این که R_1 یک ناحیه تک برش پذیر است.

به بیان دیگر برش‌های s_1 و s_2 ، سه ناحیه α -چاق را ایجاد می‌کنند به طوری که در هر ناحیه بیش‌تر

از $\beta.n$ نقطه نباشد. برای مثال شکل ۵.۱ را ببینید.

گفته می‌شود ناحیه R ، **دو برش پذیر**^{۲۳} است اگر یک دو برش برای R وجود داشته باشد.

در مقاله‌ی [۱۱]، اثبات شده است که برای هر ناحیه کانونی α -چاق، و به ازای پارامترهای $\alpha > 18d\sqrt{d}$

و $\beta \geq (d+1)/(d+2)$ ، یک دو برش وجود دارد (مرجع [۱۱]، قضیه‌ی ۱-۵). به دلیل طولانی بودن

روند اثبات، از ذکر جزئیات، در این قسمت خودداری شده و از قضیه در ادامه استفاده می‌شود.

شبه کد ساخت درخت نسبیت کراندار برای مجموعه نقاط P شامل n نقطه را در الگوریتم ۱ مشاهده

می‌کنید. از عبارت $\ell(R) \leftarrow (R_1, R_2)$ استفاده می‌شود تا نشان داده شود که ناحیه R توسط برش

ℓ قطع، و دو زیرناحیه R_1 و R_2 ایجاد شده است.

^{۲۲}Two-Cut

^{۲۳}Two-Cutable

الگوریتم ۱: ساخت درخت نسبیت کراندار

ورودی: گرهی u که در ابتدا ریشه‌ی درخت قرار می‌گیرد،

مجموعه‌ی S_u ، شامل مجموعه نقاط در ناحیه‌ی متناظر با گرهی u (در ابتدا مجموعه نقاط P است)، ناحیه‌ی R_u که یک ناحیه‌ی α -چاق است و شامل مجموعه نقاط S_u است (در ابتدا مربع دربرگیرنده‌ی مجموعه نقاط P)،

پارامترهای α و β که $1/2 < \beta < 1$.

خروجی: درخت نسبیت کراندار برای مجموعه نقاط P .

تا وقتی که $|S_u| > 1$ است تکرار کن:

۱: اگر تک برش s_1 برای ناحیه‌ی R_u وجود دارد، آنگاه قرار دهید: $(R_1, R_2) \leftarrow s_1(R_u)$.

۲: در غیر این صورت، فرض کنید s_2 ، دو برش برای R_u است. قرار دهید: $(R_1, R_2) \leftarrow s_2(R_u)$.

۳: ایجاد دو فرزند v و w برای گرهی u .

۴: تخصیص نواحی $R_w = R_2$ و $R_v = R_1$.

۵: افزاز مجموعه نقاط S_u به S_v و S_w .

۶: بازگشت روی گرهی v ، متناظر با ناحیه‌ی R_v و شامل نقطه.

۷: بازگشت روی گرهی w ، متناظر با ناحیه‌ی R_w و شامل نقطه.

قضیه ۱۲.۳.۱ ([۱۱]) درخت نسبیت کراندار ساخته شده، با استفاده از الگوریتم ۱، دارای عمق $\mathcal{O}(\log_{1/\beta} n)$ است.

اثبات. الگوریتم با یک ناحیه‌ی کانونی α -چاق شامل همه‌ی نقاط P شروع می‌کند. اگر اندازه‌ی مجموعه بیش‌تر از یک بود، آنگاه الگوریتم یک تک برش و در صورت عدم وجود تک برش، یک دو برش را می‌یابد. از آنجا که همه‌ی نواحی کانونی α -چاق، دو برش پذیر هستند، بنابراین پس از حداکثر دو تکرار، یک تک برش انجام می‌شود. این فرآیند، ناحیه‌ای مانند R_u را به حداکثر سه زیرناحیه‌ی α -چاق تقسیم می‌کند که هر یک دارای حداکثر $\beta|R_u|$ نقطه است ($1/2 < \beta < 1$)؛ در واقع در درخت ساخته شده، از هر گره مانند u ، با پایین آمدن به تعداد دو سطح، تعداد نقاط حداکثر β برابر تعداد نقاط S_u می‌شود، در نتیجه برای رسیدن به نواحی دارای حداکثر یک نقطه، فرآیند تقسیم زیرناحیه‌ها حداکثر $\mathcal{O}(\log_{1/\beta} n)$

بار تکرار شده و عمق درخت $O(\log_{1/\beta} n)$ می‌باشد.

□

قضیه ۱۳.۳.۱ ([۱۱]) درخت نسبیت کراندار برای n نقطه در فضای \mathbb{R}^d (d در مقایسه با n یک مقدار ثابت است)، در زمان $O(n \log n)$ قابل ساخت است.

۴.۱ پوشش‌های هندسی

۱.۴.۱ شبکه‌های هندسی

مجموعه‌ی P شامل n نقطه در فضای \mathbb{R}^d را در نظر بگیرید، یک شبکه‌ی متصل کننده‌ی نقاط P ، یک گراف $G(P, E)$ با مجموعه رأس‌های P و مجموعه یال‌های $E \subseteq P \times P$ است، به طوری که هر دو نقطه‌ی $p, q \in P$ با یک مسیر در G به هم متصل می‌شوند. یک شبکه‌ی هندسی^{۲۴} یا یک گراف اقلیدسی، یک گراف وزن دار G است که رأس‌ها متناظر با نقاط در فضای اقلیدسی، و وزن روی یال‌ها، متناظر با فاصله‌ی اقلیدسی بین نقاط انتهایی آن یال است. شبکه‌های هندسی تعداد زیادی از شبکه‌های حقیقی موجود، مانند شبکه‌ی راه‌ها، شبکه مخابرات و غیره را مدل می‌کنند.

برای طراحی یک شبکه برای مجموعه‌ی مشخصی از نقاط، چندین معیار کیفی در نظر گرفته می‌شود. در زیر تعدادی از مهم‌ترین معیارهای کیفی برای ارزیابی شبکه‌های هندسی بیان شده است.

۱. اندازه^{۲۵}: به عنوان تعداد یال‌های شبکه تعریف می‌شود. در حالت کلی ترجیح داده می‌شود که

شبکه‌ها تا جای ممکن اندازه‌ی کوچکی (خطی از تعداد نقاط) داشته باشند.

۲. وزن^{۲۶}: به عنوان مجموع وزن یال‌های شبکه تعریف می‌شود. از آنجایی که هر شبکه باید تمام

نقاط را به هم وصل کند، در نتیجه وزن آن از پایین با وزن درخت پوشای کمینه کران دار می‌شود.

^{۲۴}Geometric Network

^{۲۵}Size

^{۲۶}Weight

وزن یک معیار خوب برای سنجش هزینه‌ی ساخت شبکه است. بنابراین، اغلب شبکه‌هایی با وزن کم، مورد انتظار هستند.

۳. ضریب کشش^{۲۷} یا تاخیر^{۲۸}: برای دو نقطه‌ی دلخواه در مجموعه نقاط $P \in \mathbb{R}^d$ ، برابر با نسبت کوتاه‌ترین مسیر (مسیر با کم‌ترین وزن)، بین دو نقطه در شبکه، به فاصله‌ی آن دو نقطه، در گراف کامل مجموعه نقاط P است. ضریب کشش یک شبکه، به عنوان بیش‌ترین ضریب کشش برای هر جفت از نقاط مجزا در شبکه تعریف می‌شود. در بسیاری از موارد نیاز است که ضریب کشش شبکه، با یک ثابت کوچک محدود شود (که حداقل باید یک باشد). شبکه‌ها با ضریب کشش حداکثر t ، t -پوشش‌ها^{۲۹} نامیده می‌شوند.

۴. درجه^{۳۰}: بیش‌ترین تعداد یال‌های مجاور به هر نقطه در شبکه می‌باشد و اغلب نیاز است که با یک ثابت کوچک محدود شود. درجه‌ی محدود یک شبکه، به اندازه‌ی کوچک آن شبکه اشاره می‌کند، اما برعکس این مطلب همواره درست نیست.

در حالت کلی، در زمان طراحی یک شبکه، آن‌چه که اهمیت زیادی دارد، اعمال ترکیبی از این معیارهای کیفی بر روی شبکه است و در زمان تحلیل شبکه نیز ویژگی‌های شبکه، نسبت به این معیارها سنجیده می‌شود. از مسائل مهم در این زمینه، مطالعه‌ی شبکه‌هایی با ضریب کشش کم است (در ترکیب با دیگر ویژگی‌ها). از جمله، در بسیاری از کاربردها مانند شبکه‌ی راه‌ها لازم است یک ارتباط سریع (مستقیم) بین هر جفت از نقاط در P برقرار باشد (یعنی شبکه یک گراف کامل باشد) ولی این نیاز به خاطر هزینه‌های بالا، قابل برآورده شدن نیست. بنابراین نیاز به مطالعه‌ی شبکه‌هایی با ضریب کشش کم، منجر به شکل‌گیری مفهوم پوشش‌های هندسی می‌شود. این پوشش‌ها در واقع یک ساختار برای شبکه‌ها، زمانی که ارتباطات کوتاه بین نقاط اهمیت دارند را فراهم می‌کند.

^{۲۷}Stretch Factor

^{۲۸}Dilation

^{۲۹} t -Spanners

^{۳۰}Degree

۲.۴.۱ t -پوشش‌های هندسی

تعریف ۱.۴.۱ مجموعه‌ی P شامل n نقطه در فضای \mathbb{R}^d ، و $t \geq 1$ را یک عدد حقیقی در نظر بگیرید. گراف اقلیدسی $\mathcal{G}(P, E)$ و زیرگراف $\mathcal{G}'(P, E')$ ، به طوری که $E' \subseteq E$ ، داده شده است؛ یک t -پوشش برای \mathcal{G} است، اگر کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو نقطه‌ی $p, q \in P$ در \mathcal{G}' ، که با نماد $d_{\mathcal{G}'}(p, q)$ نشان داده می‌شود، این شرط را داشته باشد:

$$d_{\mathcal{G}'}(p, q) \leq t \cdot d_{\mathcal{G}}(p, q).$$

هر مسیری که این شرط را برآورده سازد یک t -مسیر^{۳۱} بین p و q نامیده می‌شود.

اگر گراف $\mathcal{G}_c(P) = \mathcal{G}(P, E)$ گراف کامل روی مجموعه نقاط در نظر گرفته شود، آنگاه می‌توان گفت زیرگراف $\mathcal{G}'(P, E')$ (به طوری که $E' \subseteq E$)، یک t -پوشش برای مجموعه نقاط P است، اگر به ازای هر دو نقطه‌ی $p, q \in P$ شرط

$$d_{\mathcal{G}'}(p, q) \leq t \cdot \|pq\|$$

برقرار باشد.

برای هر عدد حقیقی t' که $t' > t$ است، اگر \mathcal{G} یک t -پوشش برای مجموعه نقاط P باشد، بدیهی است که \mathcal{G} یک t' -پوشش نیز برای P است. این، منجر به تعریف زیر می‌شود:

تعریف ۲.۴.۱ (ضریب کشش) مجموعه‌ی P شامل n نقطه در فضای \mathbb{R}^d و \mathcal{G} را یک گراف اقلیدسی با رأس‌های P در نظر بگیرید. ضریب کشش \mathcal{G} ، کوچک‌ترین عدد حقیقی t است به طوری که \mathcal{G} یک t -پوشش از P باشد.

گراف کامل یک 1 -پوشش است، اما تعداد یال‌های آن از مرتبه‌ی مربعی روی تعداد رأس‌ها است. درحقیقت، اگر فرض شود که هیچ سه نقطه‌ای از P روی یک خط قرار ندارند، آنگاه گراف کامل تنها 1 -پوشش برای P است. بنابراین در حالت کلی، t -پوشش‌ها برای t های بزرگ‌تر از یک بررسی می‌شوند. اما از آنجایی که در بسیاری از کاربردها، پوشش‌هایی با ارتباطات سریع (ضریب کشش کم) مورد نیاز هستند، بنابراین

^{۳۱}t-Path

پوشش‌هایی با ضریب کشش نزدیک به یک، مورد مطالعه قرار می‌گیرند. یعنی $t = 1 + \varepsilon$ ، برای مقادیر ε مثبت و کوچک ($0 < \varepsilon < 1$). به این ترتیب، می‌توان با انتخاب مقادیر خیلی کوچک برای ε ، مقدار t را به یک نزدیک کرد، یعنی t -پوشش را به یک 1 -پوشش (گراف کامل)، نزدیک کرد. علاوه بر ضریب کشش، اندازه، وزن و درجه‌ی کم نیز در طراحی پوشش‌ها حائز اهمیت هستند.

۳.۴.۱ پوشش‌های هندسی با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های محدب

یکی دیگر از ویژگی‌هایی که شبکه‌ها می‌توانند داشته باشند، قابلیت تحمل شکست ناحیه‌ای^{۳۲} است؛ به این معنی که اگر شبکه‌ای t -پوشش باشد، پس از حذف تعدادی از رأس‌ها و یال‌های متعلق به یک ناحیه‌ی خاص در شبکه، همچنان ویژگی‌های پوشش، در شبکه‌ی باقیمانده، حفظ شود؛ به عبارتی بین هر دو رأس دلخواه در شبکه‌ی باقیمانده، یک t -مسیر وجود داشته باشد.

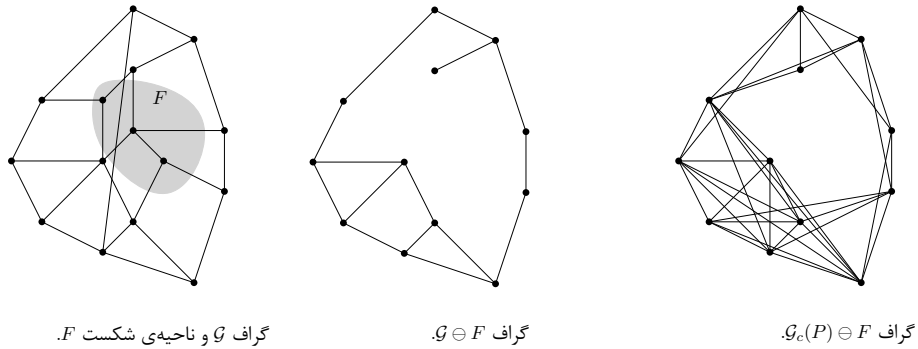
فرض کنید \mathcal{F} مجموعه‌ای از نواحی در صفحه است که نواحی شکست^{۳۳} نامیده می‌شوند. برای یک ناحیه‌ی شکست $F \in \mathcal{F}$ و یک گراف \mathcal{G} ، نماد $\mathcal{G} \ominus F$ ، نشان دهنده‌ی قسمتی از گراف \mathcal{G} است که پس از حذف رأس‌ها و تمام یال‌هایی که با ناحیه‌ی F اشتراک دارند، حاصل شده است. شکل ۶.۱، قسمت دوم را ببینید.

تعریف ۳.۴.۱ گراف اقلیدسی \mathcal{G} با مجموعه رأس‌های P در صفحه، یک t -پوشش با قابلیت تحمل شکست نواحی \mathcal{F} است، اگر به ازای هر ناحیه‌ی $F \in \mathcal{F}$ ، گراف $\mathcal{G} \ominus F$ ، یک t -پوشش برای $\mathcal{G}_c(P) \ominus F$ باشد. به عبارت دیگر به ازای هر دو نقطه‌ی $p, q \in P$ ، طول کوتاه‌ترین مسیر بین p و q در گراف $\mathcal{G} \ominus F$ ، حداکثر t برابر طول کوتاه‌ترین مسیر در گراف $\mathcal{G}_c(P) \ominus F$ باشد. شکل ۶.۱ را ببینید.

داشتن این ویژگی برای پوشش‌ها، بسیار مناسب است. به خصوص وقتی پوشش‌ها، شبکه‌ی راه‌ها را مدل می‌کنند و یک حادثه باعث خرابی و از بین رفتن همه‌ی راه‌ها، در یک ناحیه‌ی خاص می‌شود.

^{۳۲}Region Fault Tolerant

^{۳۳}Fault Regions



شکل ۶.۱: گراف اقلیدسی و گراف باقیمانده پس از حذف رأس‌ها و یال‌های داخل ناحیه‌ی شکست.

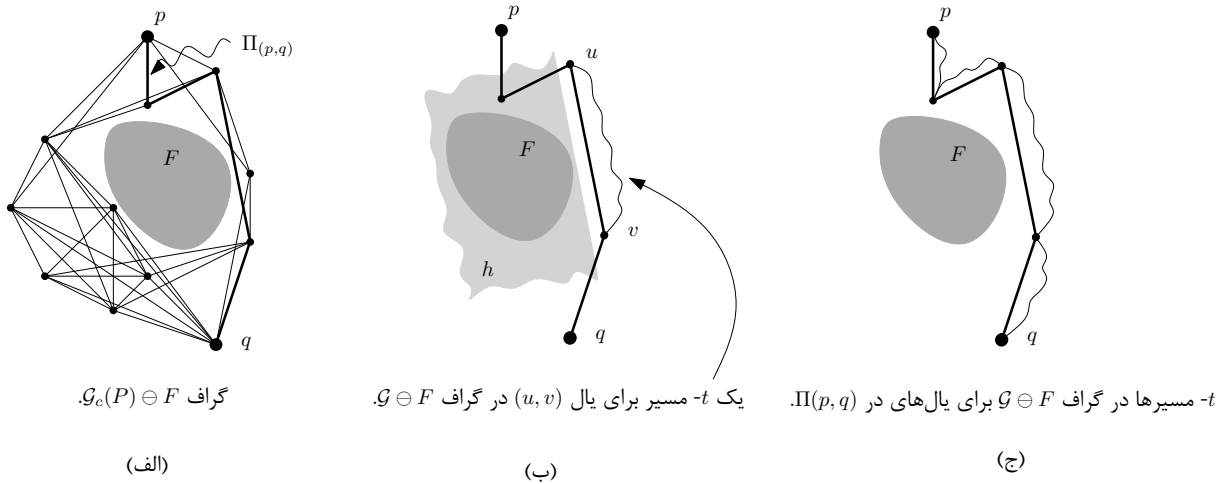
در این پایان‌نامه پوشش‌های هندسی با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های محدب^{۳۴}، و نحوه‌ی ساخت آن‌ها با استفاده از SSPDها (مفهومی که در ادامه تعریف می‌شود)، بررسی می‌شود. در این جا لمی مطرح می‌شود که نشان می‌دهد در هنگام ساخت پوشش‌ها با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های محدب، می‌توان ناحیه‌های شکست را به صورت نیم‌صفحه، در نظر گرفت.

لم ۴.۴.۱ ([۳]) فرض کنید \mathcal{H} مجموعه‌ی همه‌ی نیم‌صفحه‌ها و \mathcal{C} مجموعه‌ی همه‌ی نواحی محدب در صفحه باشند. گراف اقلیدسی \mathcal{G} با مجموعه نقاط P در صفحه، یک t -پوشش با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های محدب است، اگر و تنها اگر یک t -پوشش با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های داخل مجموعه‌ی \mathcal{H} باشد.

اثبات. هر نیم‌صفحه یک ناحیه‌ی محدب است، بنابراین هر پوشش با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های محدب، قابلیت تحمل شکست ناحیه‌هایی که به صورت نیم‌صفحه هستند، را نیز دارد. برای اثبات طرف دیگر، فرض کنید \mathcal{G} یک t -پوشش با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های مجموعه‌ی \mathcal{H} است، $F \in \mathcal{C}$ را یک ناحیه‌ی شکست محدب دلخواه در نظر بگیرید. آنچه باید ثابت شود این است که بین هر دو نقطه‌ی $p, q \in P \setminus F$ یک مسیر در گراف $\mathcal{G} \ominus F$ ، به طول حداکثر t برابر طول کوتاه‌ترین مسیر بین p و q ، در $\mathcal{G}'_c = \mathcal{G}_c(P) \ominus F$ وجود دارد. به عبارتی آیا در گراف $\mathcal{G} \ominus F$ مسیری بین نقاط p و q وجود دارد که دارای شرط زیر باشد؟

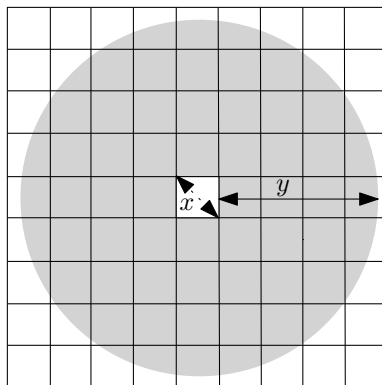
$$d_{\mathcal{G} \ominus F}(p, q) \leq t \cdot d_{\mathcal{G}'_c}(p, q). \quad (1-1)$$

^{۳۴}Convex Regions-Fault Tolerant Geometric Spanners



شکل ۷.۱: مربوط به اثبات لم ۴.۴.۱.

اگر بین p و q در G_c' مسیری وجود نداشته باشد، بنابراین در $G \ominus F$ نیز مسیری بین این دو نقطه وجود ندارد. عدم وجود مسیر بین دو رأس در گراف، به معنای مسیر با طول بی‌نهایت است، بنابراین رابطه‌ی ۱-۱ صادق است و لم اثبات می‌شود. در غیر این صورت، یعنی اگر بین p و q در G_c' مسیری وجود داشته باشد، $\Pi(p, q)$ را کوتاه‌ترین مسیر بین این دو نقطه در G_c' ، در نظر بگیرید، شکل ۷.۱، قسمت (الف) را ببینید. ادعا می‌شود به ازای هر یال (u, v) در مسیر $\Pi(p, q)$ ، یک مسیر در گراف $G \ominus F$ ، با طول حداکثر t برابر $\|uv\|$ وجود دارد. در صورت اثبات این ادعا، نتیجه می‌شود که برای تمامی یال‌های متعلق به مسیر $\Pi(p, q)$ ، یک t -مسیر در گراف $G \ominus F$ بین نقاط انتهایی هر یال وجود دارد، در نتیجه، با اتصال این t -مسیرها به یک‌دیگر، یک t -مسیر بین نقاط p و q در $G \ominus F$ حاصل می‌شود. برای اثبات ادعا می‌توان گفت یال (u, v) در گراف G_c' خارج از ناحیه‌ی F قرار می‌گیرد، از طرفی چون F محدب است، نیم‌صفحه‌ای مانند h ، شامل F وجود دارد که با یال (u, v) اشتراک ندارد، شکل ۷.۱، قسمت (ب) را ببینید. طبق فرض، G یک t -پوشش با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های نیم‌صفحه‌ای است، بنابراین به ازای نیم‌صفحه‌ی h ، یک مسیر مانند $\Pi(u, v)$ بین نقاط u و v در $G \ominus h$ وجود دارد که طول آن حداکثر $t \cdot \|uv\|$ است. از آنجا که $F \subset h$ است، پس مسیر $\Pi(u, v)$ در $G \ominus F$ نیز وجود دارد. شکل ۷.۱، قسمت (ج) را ببینید؛ به این ترتیب ادعا و در نتیجه، لم اثبات می‌شود. \square



شکل ۸.۱: شکل مربوط به استدلال بسته بندی.

۵.۱ بسته بندی

لم ۱.۵.۱ ([۱۷]) (استدلال بسته بندی)^{۳۵} فرض کنید G ، شبکه‌ای^{۳۶} در فضای \mathbb{R}^d و \square یک سلول در G ، با اندازه‌ی قطر x است (\square یک ناحیه‌ی چاق است)؛ به ازای هر مقدار $y \geq x$ ، تعداد سلول‌های متعلق به G (هم اندازه با \square)، که فاصله‌ی آن‌ها از \square ، حداکثر y است، با $O((y/x)^d)$ کراندار می‌شود، شکل ۸.۱ را ببینید.

اثبات. اثبات برای فضای \mathbb{R}^d ، از تقسیم حجم دیسک d بعدی، با شعاع $O(y)$ ، به حجم سلول شبکه که دارای قطر x است، حاصل می‌شود. \square

تعریف ۲.۵.۱ دایره‌ی $b(p, r)$ به مرکز p و شعاع r را در نظر بگیرید؛ **حلقه‌ی**^{۳۷} $ring(p, r_1, r_2)$ به مرکز p ، شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2 ، فضای بین دو دایره‌ی هم‌مرکز $b(p, r_1)$ و $b(p, r_2)$ تعریف می‌شود، به عبارتی:

$$ring(p, r_1, r_2) = b(p, r_2) \setminus b(p, r_1).$$

^{۳۵}Packing Argument

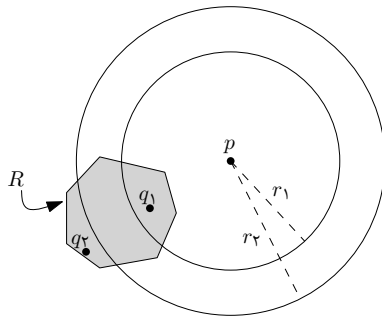
^{۳۶}Grid

^{۳۷}Ring

تعریف ۳.۵.۱ حلقه‌ی A به مرکز p ، شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2 را در نظر بگیرید؛ گفته می‌شود ناحیه‌ی R ، حلقه‌ی A را می‌شکافد^{۳۸} اگر و فقط اگر دو نقطه‌ی $q_1, q_2 \in R$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که

$$d(p, q_1) \leq r_1 \leq r_2 \leq d(p, q_2)$$

باشد. به بیان دیگر ناحیه‌ی R در دو طرف دیسک‌های تشکیل دهنده‌ی حلقه‌ی A قرار می‌گیرد. شکل ۹.۱ را برای حالت دو بعدی ببینید.

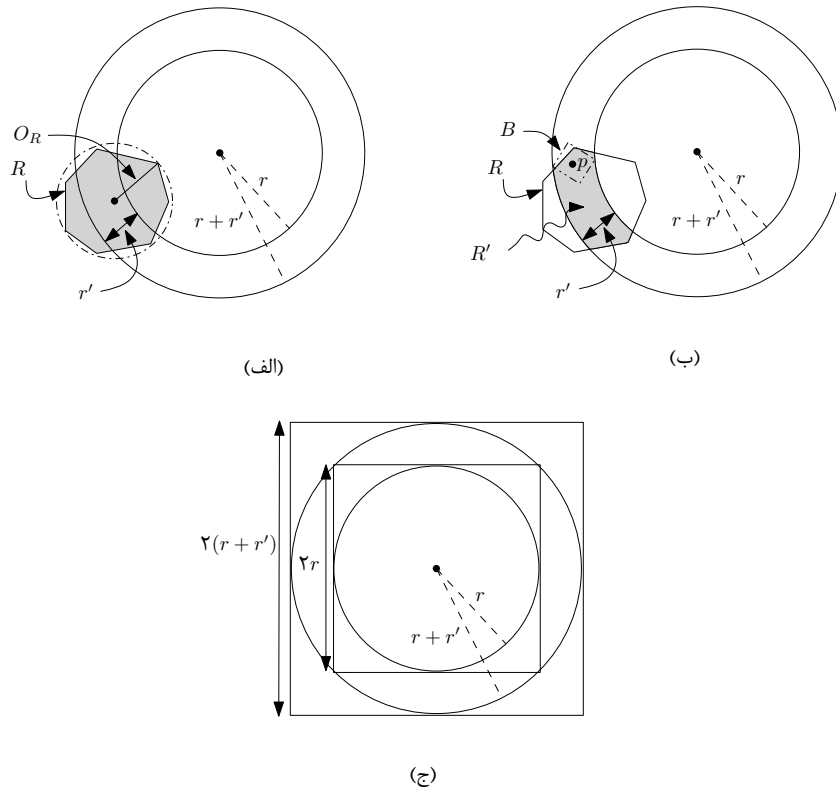


شکل ۹.۱: حلقه و ناحیه‌ی شکافنده‌ی حلقه در صفحه.

لم ۴.۵.۱ (لم بسته‌بندی) فرض کنید T درخت نسبیت کراندار با ماکزیمم نرخ نسبیت $\alpha > 0$ ، برای مجموعه نقاط P در فضای \mathbb{R}^d باشد. به ازای حلقه‌ی A با شعاع داخلی r و شعاع خارجی $r + r'$ حداکثر $O((\alpha\sqrt{d})^d \cdot (r/r')^{d-1})$ گره‌ی برگ در T وجود دارد که ناحیه‌ی متناظر با آن‌ها، حلقه‌ی A را می‌شکافد.

اثبات. فرض کنید ℓ یک گره‌ی برگ، متناظر با ناحیه‌ی R در درخت نسبیت کراندار است، به طوری که R ، حلقه‌ی A را می‌شکافد؛ بنابراین شعاع دایره‌ی محیطی ناحیه‌ی R ، به صورت $O_R \geq r'/2$ است، شکل ۱۰.۱ قسمت (الف) را ببینید. همچنین فرض کنید B ، یک گره‌ی d بعدی با شعاع $r'/2$ و تعریف شده در متر L_1 است که مرکز آن داخل ناحیه‌ی R قرار می‌گیرد. از آنجایی که R متناظر با یک گره در درخت نسبیت کراندار T است، لذا محدب و α -چاق (طبق تعریف اول α -چاق) است، و همان‌گونه

^{۳۸}Pierce



شکل ۱۰.۱: مربوط به اثبات لم ۴.۵.۱.

که در زیر بخش ۲.۳.۱ گفته شد، R, α^d -چاق طبق تعریف دوم نواحی چاق است. در نتیجه به ازای کره‌ی B و با توجه به تعریف دوم نواحی چاق، می‌توان گفت:

$$V(B \cap R) \geq V(B)/\alpha^d. \quad (۲-۱)$$

همان‌گونه که گفته شد، ناحیه‌ی R ، حلقه‌ی A را می‌شکافد، لذا لزوماً نقطه‌ای مانند p داخل R وجود دارد که کره‌ی d بعدی B ، به مرکز p و شعاع $r'/2$ ، کاملاً داخل حلقه‌ی A قرار می‌گیرد، شکل ۱۰.۱، قسمت (ب) را ببینید.

قرار دهید $R' = R \cap A$ (ناحیه‌ی خاکستری در قسمت (ب) شکل ۱۰.۱). از آنجا که $A \cap B = B$ و $B \cap R = B \cap A \cap R \subset R'$ است، بنابراین با توجه به رابطه‌ی ۲-۱، می‌توان رابطه‌ی زیر را برای حجم ناحیه‌ها نوشت:

$$V(R') \geq V(B \cap R) \geq V(B)/\alpha^d = \left(\frac{r'}{\alpha\sqrt{d}}\right)^d. \quad (۳-۱)$$

تساوی آخر از این‌جا نتیجه می‌شود که حجم یک کره با قطر x ، در فضای d بعدی و با متر L_1 ، برابر با

از آنجایی که می‌توان از متریک‌های مختلف در مسأله استفاده کرد، در این جا برای محاسبه‌ی حجم A ، از متر L_∞ استفاده می‌شود، که بیش‌ترین حجم ممکن را برای حلقه‌ی A ، در مقایسه با مترهای دیگر، حاصل می‌کند. حجم حلقه‌ی A در L_∞ ، از تفاضل بین حجم جعبه‌ی بیرونی و جعبه‌ی داخلی که به ترتیب دارای طول ضلع‌های $2r$ و $2(r+r')$ هستند، حاصل می‌شود، شکل ۱۰.۱ قسمت (ج) را ببینید. بنابراین داریم:

$$V(A) \leq (2r + 2r')^d - (2r)^d = (2r)^d((1 + r'/r)^d - 1). \quad (4-1)$$

از آنجا که ناحیه‌های متناظر با گره‌های برگ در درخت نسبیت کراندار، با یکدیگر همپوشانی ندارند، بنابراین با توجه به روابط ۳-۱ و ۴-۱، تعداد گره‌های برگ مانند ℓ ، که حلقه‌ی A را می‌شکافد، را با m نشان داده و به صورت زیر کراندار می‌شود:

$$m \leq V(A)/V(R') \leq ((2\alpha\sqrt{d})^d((r/r') + 1)^d - (r/r')^d) \in \mathcal{O}((\alpha\sqrt{d})^d(r/r')^{d-1}).$$

و به این ترتیب لم اثبات می‌شود. \square

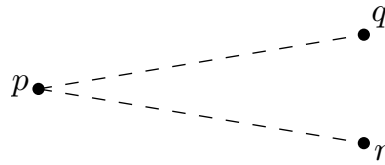
۶.۱ تجزیه‌ی نقاط به زوج‌های کاملاً مجزا و نیم مجزا

مقدمه

مجموعه نقاط P در فضای \mathbb{R}^d را در نظر بگیرید؛ فواصل بین هر زوج از نقاط P را می‌توان با لیست کردن $\binom{n}{2} \in \theta(n^2)$ فاصله نوشت. اما تهیه‌ی این لیست علاوه بر این که زمان بر بوده و حافظه‌ی زیادی را اشغال می‌کند، در بسیاری از موارد نیز به تمام عناصر این لیست به طور دقیق نیازی نیست و تنها داشتن یک ساختار کلی و تقریبی برای فواصل، کفایت می‌کند. به عنوان مثال فرض کنید p ، q و r ، سه نقطه در صفحه، غیر واقع بر یک خط هستند. شکل ۱۱.۱ را ببینید. در این مثال، به دنبال نمایشی از فواصل هستیم که مشخص کند نقطه‌ی p از نقاط q و r ، دارای فاصله‌ی یکسان است و همچنین نقاط q و r نزدیک‌ترین زوج^{۳۹}، در بین سه زوج $\{p, r\}$ ، $\{q, r\}$ و $\{p, q\}$ است. به این منظور، مفهوم تجزیه زوج‌های کاملاً مجزا

^{۳۹}Closest Pair

و نیم مجزا مطرح شدند، که در ادامه تعاریف و نحوه‌ی ساخت آن‌ها آمده است.



شکل ۱۱.۱: سه نقطه در صفحه و وضعیت زوج نقاط نسبت به یکدیگر.

تعریف ۱.۶.۱ ضرب متقابل^{۴۰} بین دو مجموعه نقاط P و Q که با $P \otimes Q$ نشان داده می‌شود، برابر است با تمام زوج‌های نامرتب^{۴۱} $\{p, q\}$ ، به طوری که $p \in P$ و $q \in Q$ و $p \neq q$ باشد؛ به زبان ریاضی:

$$P \otimes Q = \{ \{p, q\} \mid p \in P, q \in Q, p \neq q \}.$$

توجه کنید که $P \otimes P$ مجموعه‌ای از تمام زوج‌های مجزا (مولفه‌ی اول و دوم در زوج، نابرابر هستند) از نقاط P است.

تعریف ۲.۶.۱ برای مجموعه نقاط P در فضای \mathbb{R}^d ، یک تجزیه زوج^{۴۲} برای نقاط P ، مجموعه‌ای مانند \mathcal{W} است، که شامل زوج‌هایی به صورت:

$$\mathcal{W} = \{ \{ \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1 \}, \dots, \{ \mathcal{X}_s, \mathcal{Y}_s \} \},$$

می‌باشد، به طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

$$\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i \subset P : 1 \leq i \leq s \quad \square$$

$$\mathcal{X}_i \cap \mathcal{Y}_i = \emptyset : 1 \leq i \leq s \quad \square$$

$$\bigcup_{i=1}^s \mathcal{X}_i \otimes \mathcal{Y}_i = P \otimes P \quad \square$$

^{۴۰} Interaction Product

^{۴۱} Unordered Pairs

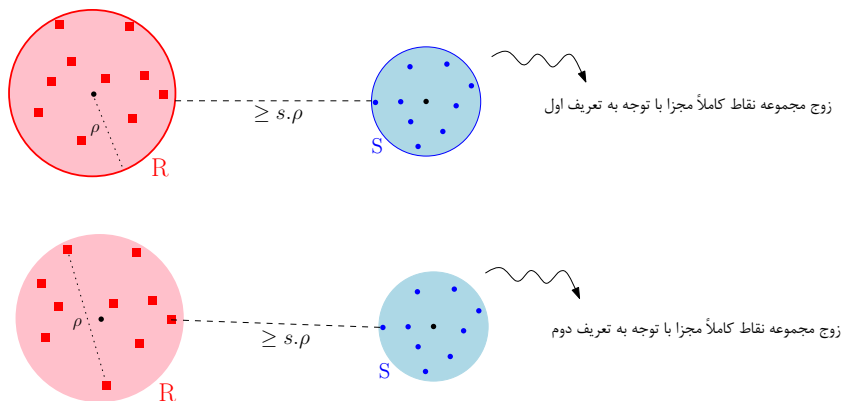
^{۴۲} Pair Decomposition

از دو شرط آخر نتیجه می‌شود به ازای هر دو نقطه‌ی متمایز $p, q \in P$ یک زوج مانند $\{\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i\}$ وجود دارد به طوری که $p \in \mathcal{X}_i$ و $q \in \mathcal{Y}_i$ یا برعکس ($q \in \mathcal{X}_i$ و $p \in \mathcal{Y}_i$) است. در ادامه برای نمایش یک زوج از مجموعه نقاط \mathcal{X} و \mathcal{Y} ، از عبارت $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ استفاده می‌شود که البته منظور از این عبارت، زوجی نامرتب است؛ یعنی زوج $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ با زوج $(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ یکسان در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۳.۶.۱ وزن ^{۴۳} تجزیه زوج \mathcal{W} که با ω نشان داده می‌شود، به صورت مجموع تعداد نقاط در هر یک از زوج‌های متعلق به \mathcal{W} تعریف می‌شود؛ به عبارتی:

$$\omega(\mathcal{W}) = \sum_{i=1}^s (|\mathcal{X}_i| + |\mathcal{Y}_i|).$$

همچنین تعداد زوج‌های یک تجزیه زوج را **اندازه‌ی** ^{۴۴} آن تجزیه زوج گویند.



شکل ۱۲.۱: زوج مجموعه نقاط کاملاً مجزای R و S با پارامتر s .

۱.۶.۱ زوج مجموعه نقاط کاملاً مجزا و نیم مجزا

تعریف ۴.۶.۱ مجموعه نقاط P و Q در فضای \mathbb{R}^d را در نظر بگیرید؛ فاصله‌ی بین مجموعه نقاط P و Q که با $d(P, Q)$ نشان داده می‌شود، برابر است با کوچک‌ترین فاصله، که بین همه‌ی نقاط $p \in P$ و نقاط $q \in Q$ وجود دارد؛ به زبان ریاضی:

^{۴۳}Weight

^{۴۴}Size

$$d(P, Q) = \min_{p \in P, q \in Q} \|p - q\|.$$

همچنین فاصله‌ی بین دو دایره در فضای \mathbb{R}^d از تفاضل فاصله‌ی بین مرکز دایره‌ها و مجموع شعاع دو دایره، حاصل می‌شود.

تعریف ۵.۶.۱ مجموعه نقاط P در فضای \mathbb{R}^d را در نظر بگیرید؛ قطر مجموعه نقاط P ^{۴۵} که با $\text{diam}(P)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از بیش‌ترین فاصله بین دو نقطه از P ؛ همچنین کوچک‌ترین دیسک در برگیرنده‌ی P ^{۴۶} مجموعه‌ی P با D_P ، و شعاع این دیسک با $\text{radius}(D_P)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۶.۶.۱ مجموعه نقاط R و S در فضای \mathbb{R}^d را در نظر بگیرید؛ برای زوج مجموعه نقاط کاملاً مجزا ^{۴۷}، دو تعریف ارائه شده است که در این‌جا مطرح می‌شوند:

□ **تعریف اول:** ([۳]، [۲۰] و [۹]) مجموعه نقاط R و S را نسبت به پارامتر $s > 0$ (s یک عدد ثابت است که به آن ثابت تفکیک ^{۴۸} نیز گفته می‌شود)، کاملاً مجزا ^{۴۹} گویند، اگر فاصله‌ی بین کوچک‌ترین دیسک‌های در برگیرنده‌ی مجموعه نقاط R و S ، بزرگ‌تر از s برابر بیش‌ترین شعاع این دیسک‌ها باشد؛ به زبان ریاضی:

$$d(D_R, D_S) \geq s \cdot \max(\text{radius}(R), \text{radius}(S)).$$

به تعبیر شهودی اگر s مقدار بزرگی باشد، فاصله‌ی بین هر نقطه در مجموعه‌ی R و هر نقطه در مجموعه‌ی S در مقایسه با فاصله‌ی بین هر دو نقطه در R و هر دو نقطه در S ، زیاد است و همچنین فاصله‌ی بین هر دو نقطه، که یکی در R و دیگری در S است، به طور تقریبی، یکسان است (مرجع [۲۰]، فصل ۹). شکل ۱۲.۱ را ببینید. لازم به ذکر است این تعریف تنها برای نقاط در فضای اقلیدسی مطرح شده است.

^{۴۵}Diameter of Point Set

^{۴۶}Minimum Enclosing Disk

^{۴۷}Well Separated Pair of point set

^{۴۸}Separation Constant

^{۴۹}Well Separated

□ **تعریف دوم:** ([۶] و [۱۷]) مجموعه نقاط R و S ، نسبت به پارامتر $s > 0$ ، کاملاً مجزا هستند، اگر فاصله‌ی بین مجموعه نقاط R و S ، بزرگ‌تر از s برابر بیش‌ترین قطر دو مجموعه باشد؛ به زبان ریاضی:

$$d(R, S) \geq s \cdot \max(\text{diam}(R), \text{diam}(S)).$$

شکل ۱۲.۱ را ببینید. لازم به ذکر است این تعریف از زوج‌های کاملاً مجزا، برای نقاط در هر فضای متریک متناهی ارائه شده است.

تعریف ۷.۶.۱ مجموعه نقاط R و S را در نظر بگیرید؛ برای زوج مجموعه نقاط نیم مجزا^{۵۰}، سه تعریف ارائه شده است که در این‌جا، به تفکیک مطرح می‌شوند. تعریف اول مختص به نقاط در فضای \mathbb{R}^2 ، تعاریف دوم و سوم برای نقاط در فضای \mathbb{R}^d است؛

□ **تعریف اول:** ([۲۴]) این تعریف، اولین تعریف مطرح شده برای زوج مجموعه نقاط نیم مجزا، در صفحه است که توسط واراناداران^{۵۱}، به این صورت مطرح شده است:

بستار^{۵۲} $C(p, r)$ را به صورت $C(p, r) = \mathbb{R}^2 - b(p, r)$ ، در نظر بگیرید. دو مجموعه‌ی S و R در فضای \mathbb{R}^2 ، نسبت به پارامتر $s > 1$ (ثابت تفکیک)، نیم مجزا^{۵۳} هستند، اگر نقطه‌ای مانند p و یک عدد حقیقی $r \geq 0$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که $S \subseteq b(p, r)$ و $R \subseteq C(p, sr)$ باشد. لازم به ذکر است، این تعریف برای نقاط در فضای اقلیدسی مطرح شده است. شکل ۱۳.۱ را ببینید.

□ **تعریف دوم:** ([۳]) مجموعه نقاط R و S در فضای \mathbb{R}^d را نسبت به پارامتر $s > 0$ ، نیم مجزا گویند، اگر فاصله‌ی بین کوچک‌ترین دیسک‌های در بر گیرنده‌ی مجموعه نقاط R و S ، بزرگ‌تر از s برابر کوچک‌ترین شعاع این دیسک‌ها باشد؛ به زبان ریاضی:

$$d(D_R, D_S) \geq s \cdot \min(\text{radius}(D_R), \text{radius}(D_S)).$$

^{۵۰} Semi Separated Pair of point set

^{۵۱} Varadarajan

^{۵۲} Closure

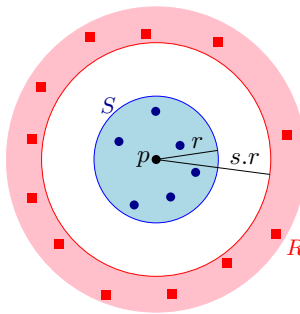
^{۵۳} Semi Separated

شکل ۱۴.۱ را ببینید. در این تعریف فضای اقلیدسی مدنظر است.

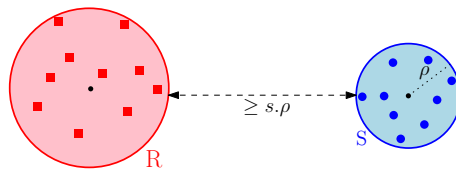
□ **تعریف سوم:** ([۶]) مجموعه نقاط R و S در فضای \mathbb{R}^d ، نسبت به پارامتر $s > 0$ ، نیم مجزا هستند، اگر فاصله‌ی بین مجموعه نقاط R و S ، بزرگ‌تر از s برابر کوچک‌ترین قطر دو مجموعه باشد؛ به زبان ریاضی:

$$d(R, S) \geq s \cdot \min(\text{diam}(R), \text{diam}(S)).$$

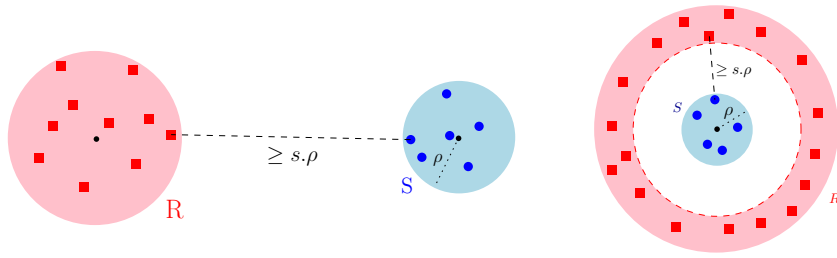
شکل ۱۵.۱ را ببینید. در تعریف سوم، هر فضای متریک متناهی مدنظر است؛ به عبارتی تعریف سوم، از تعاریف اول و دوم جامع‌تر است. لازم به ذکر است در این پایان‌نامه، تنها روی ساخت تجزیه نقاط در فضای اقلیدسی بحث شده است. با توجه به تعریف زوج مجموعه نقاط کاملاً مجزا و نیم مجزا، واضح است هر زوج مجموعه نقاطی که نسبت به هم کاملاً مجزا هستند، زوج مجموعه نقاط نیم مجزا نیز می‌باشند، ولی بر عکس این موضوع، همواره صادق نیست.



شکل ۱۳.۱: زوج مجموعه نقاط نیم مجزای R و S با پارامتر s ، با توجه به تعریف اول.



شکل ۱۴.۱: زوج مجموعه نقاط نیم مجزای R و S با پارامتر s ، با توجه به تعریف دوم.



شکل ۱۵.۱: زوج مجموعه نقاط نیم مجزای R و S با پارامتر s ، با توجه به تعریف سوم.

۲.۶.۱ تجزیه‌ی نقاط به زوج‌های کاملاً مجزا و نیم مجزا

تعریف تجزیه زوج، برای مجموعه نقاط P در فضای \mathbb{R}^d را در نظر بگیرید (تعریف ۲.۶.۱)؛ همان‌گونه که گفته شد، در یک تجزیه زوج مانند \mathcal{W} برای P ، به ازای هر دو نقطه‌ی دلخواه در مجموعه‌ی P ، یک زوج در \mathcal{W} وجود دارد که شامل این دو نقطه است. طبق این تعریف، شاید بدیهی‌ترین تجزیه زوجی که به ذهن می‌رسد، مجموعه‌ای از زوج‌های تک نقطه‌ای باشد؛ به عبارتی هر نقطه، با هر یک از $n - 1$ نقطه‌ی دیگر تشکیل زوج بدهد. اگر فرض شود نقاط P به صورت $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ است، پس تجزیه زوج مذکور به صورت

$$\mathcal{W} = \{(p_1, p_2), \dots, (p_1, p_n), (p_2, p_3), \dots, (p_2, p_n), \dots, (p_{n-1}, p_n)\},$$

خواهد بود. اندازه و همچنین وزن این تجزیه زوج، از مرتبه‌ی مربعی روی تعداد نقاط است $(\Theta(n^2))$ ، که مقدار زیادی است. در ادامه تجزیه زوج‌هایی معرفی می‌شوند که با ساخت آن‌ها طبق روش‌های خاص، علاوه بر این که ویژگی‌های یک تجزیه زوج را حفظ می‌کنند، وزن و اندازه‌ی آن‌ها، نسبت به تجزیه زوج‌های شامل زوج‌های تک نقطه‌ای، کم‌تر است (مگر در مثال‌های خاص که حداکثر وزن، مربعی است که در ادامه یک نمونه آورده شده است).

تعریف ۸.۶.۱ برای مجموعه نقاط P در فضای \mathbb{R}^d ، تجزیه زوج کاملاً مجزا^{۵۴} با پارامتر $s > 0$ که به اختصار با $WSPD$ نشان می‌دهند، تجزیه زوجی مانند \mathcal{W} از P است، به طوری که به ازای هر یک از زوج‌های $(\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i) \in \mathcal{W}$ ، دو مجموعه‌ی \mathcal{X}_i و \mathcal{Y}_i ، نسبت به پارامتر s ، کاملاً مجزا باشند، یا به عبارتی در

^{۵۴}Well Separated Pair Decomposition(WSPD)

یکی از دو تعریف مطرح شده برای زوج مجموعه نقاط کاملاً مجزا (زیر بخش ۱.۶.۱)، صدق کنند. واضح است برای هر مجموعه از نقاط مانند P ، مجموعه‌ی تمام زوج مجموعه‌های تک عضوی از P ، یک تجزیه زوج کاملاً مجزا، نسبت به هر پارامتر دلخواه $s > 0$ ، برای P است.

تعریف ۹.۶.۱ برای مجموعه نقاط P در فضای \mathbb{R}^d ، **تجزیه زوج نیم مجزا**^{۵۵} با پارامتر $s > 0$ که به اختصار با $SSPD$ نشان می‌دهند، تجزیه زوجی مانند \mathcal{W} از P است، به طوری که به ازای هر یک از زوج‌های $(\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i) \in \mathcal{W}$ ، دو مجموعه‌ی \mathcal{X}_i و \mathcal{Y}_i نسبت به پارامتر s ، نیم مجزا باشند، یا به عبارتی در یکی از سه تعریف مطرح شده برای زوج مجموعه نقاط کاملاً مجزا (زیر بخش ۱.۶.۱)، صدق کنند.

تعدادی معیار برای ارزیابی میزان مطلوب بودن یک $SSPD$ وجود دارد. در این جا به آن‌ها اشاره شده است:

۱. **وزن** : همان‌گونه که گفته شد، وزن یک تجزیه زوج و در نتیجه وزن یک $SSPD$ ، از مجموع تعداد نقاط در هر یک از زوج‌های $SSPD$ ، حاصل می‌شود. واضح است $SSPD$ ‌هایی با وزن کم، مطلوب هستند.

۲. **تعداد زوج‌هایی که یک نقطه در آن‌ها ظاهر می‌شود** : به ازای یک نقطه مانند $p \in P$ ، تعداد زوج‌هایی که p در $SSPD$ ساخته شده برای مجموعه نقاط P ، در آن‌ها قرار می‌گیرد، اهمیت دارد، به این لحاظ که هر چه این تعداد بیش‌تر باشد، در نتیجه وزن $SSPD$ نیز بیش‌تر خواهد بود. بنابراین $SSPD$ ‌هایی مطلوب هستند که هر نقطه در تعداد زوج‌های کمی از آن‌ها، ظاهر شوند.

۳. **اندازه** : عبارت است از تعداد زوج‌های تشکیل دهنده‌ی $SSPD$. در فصل چهار خواهید دید که $SSPD$ ‌های با اندازه‌ی کوچک، برای ساخت پوشش‌های هندسی با تعداد یال‌های کم، حائز اهمیت هستند.

۴. **زمان ساخت** : در طراحی الگوریتم‌ها، ارائه‌ی الگوریتم‌های ساده با زمان اجرای کم، که شرایط بهینه را ایجاد کنند، مطلوب هستند. لذا در ساخت $SSPD$ ‌ها نیز باید به دنبال چنین الگوریتم‌هایی بود.

^{۵۵}Semi Separated Pair Decomposition(SSPD)

مفهوم تجزیه زوج‌های کاملاً مجزا، توسط کالاهان^{۵۶} و کوساراجو^{۵۷} در مرجع [۹]، مطرح شد. آن‌ها نشان دادند که برای هر مجموعه شامل n نقطه در فضای \mathbb{R}^d یک $WSPD$ با پارامتر s ، شامل $O(s^d n)$ زوج، را می‌توان در زمان $O(s^d n + n \log n)$ ساخت. همچنین نشان دادند که مجموعه نقاطی شامل n نقطه وجود دارند که هر $WSPD$ برای آن‌ها دارای وزن $\Omega(n^2)$ است که این مطلوب نیست، به عنوان مثال هر $WSPD$ ساخته شده طبق روش مطرح شده در [۹]، برای حالتی که همه‌ی نقاط روی یک خط و با فاصله‌های $1, 2, \dots, 2^n$ واقع شده‌اند، دارای زوج‌هایی است که شامل یک تک نقطه و بقیه‌ی نقاط است، که این باعث مربعی شدن وزن روی تعداد نقاط می‌شود. این مشکل وارد اراجان را برای تعریف مفهوم $SSPD$ ‌ها هدایت کرد و از آن برای سرعت بخشیدن به الگوریتم تطابق کامل با کم‌ترین هزینه^{۵۸} استفاده کرد.

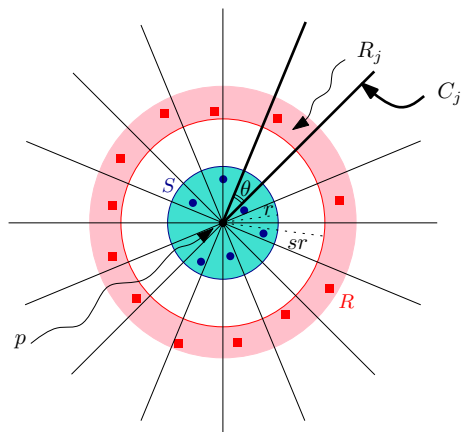
همان‌گونه که در تعریف $SSPD$ گفته شد، زوج‌های یک $SSPD$ ، می‌بایست در یکی از سه تعریف مطرح شده در زیر بخش ۱.۶.۱ صدق کنند؛ یا به عبارتی دو مجموعه نقطه داخل هر زوج، نسبت به یک‌دیگر نیم مجزا باشند (طبق یکی از سه تعریف برای زوج مجموعه نقاط نیم مجزا)؛ در این قسمت لمی مطرح می‌شود که بیان می‌کند هر $SSPD$ ، مطابق با هر یک از سه تعریف را، می‌توان به $SSPD$ دیگری تبدیل کرد، به طوری که اولاً تعریف نیم مجزا بودن دو مجموعه داخل هر زوج از آن، مطابق با تعریف دیگری تغییر کند، و ثانیاً تعداد زوج‌های $SSPD$ ‌ها، در نماد O یکسان باشد؛ یعنی تعداد زوج‌های هر یک از دو $SSPD$ ، ضریب ثابتی از تعداد زوج‌های $SSPD$ ، مطابق با تعریف دیگری باشد. به این منظور، کافی است نشان داده شود که یک زوج مجموعه نقاط نیم مجزا طبق هر یک از تعاریف، از طریق ایجاد تعداد ثابتی زوج، قابل تبدیل به زوج‌هایی با مجموعه نقاط نیم مجزا، طبق تعریف دیگری است. به عنوان نمونه، در لم زیر (لم ۱.۶.۱) زوج‌های نیم مجزا طبق تعریف اول و دوم زوج‌های نیم مجزا بررسی می‌شوند.

لم ۱.۶.۱ مجموعه نقاط S و R در فضای \mathbb{R}^2 را در نظر بگیرید؛ اگر (S, R) ، یک زوج نیم مجزا طبق تعریف اول (یا دوم) در زیر بخش ۱.۶.۱ باشد، آنگاه می‌توان (S, R) را با زوج (یا زوج‌های) نیم مجزا طبق

^{۵۶}Callahan

^{۵۷}Kosaraju

^{۵۸}Minimum Cost Perfect Matching



شکل ۱۶.۱: مربوط به لم ۱۰.۶.۱

تعریف دوم (اول) جایگزین کرد.

اثبات. فرض کنید زوج مجموعه نقاط S و R ، در تعریف دوم زوج‌های نیم مجزا صدق کند؛ به عبارتی رابطه‌ی:

$$d(D_R, D_S) \geq s \cdot \min(\text{radius}(D_R), \text{radius}(D_S))$$

برقرار باشد. بدون از دست رفتن کلیت مسأله، فرض کنید $\text{radius}(D_S) \leq \text{radius}(D_R)$ ؛ می‌توان دیسک D_S را به عنوان دیسک $b(p, r)$ در تعریف اول زوج‌های نیم مجزا، در نظر گرفت؛ در این صورت واضح است که $S \subseteq b(p, r)$ می‌باشد و دیسک D_R و در نتیجه مجموعه نقاط R ، زیرمجموعه‌ی $C(p, r) = \mathbb{R}^2 - b(p, sr)$ خواهد بود. در نتیجه زوج (S, R) ، علاوه بر تعریف دوم، در تعریف اول زوج مجموعه نقاط نیم مجزا نیز صدق می‌کند.

برای اثبات طرف دیگر، فرض کنید زوج مجموعه نقاط S و R ، در تعریف اول زوج مجموعه نقاط نیم مجزا صدق کند؛ به ازای $r > 1$ و بدون از دست رفتن کلیت مسأله فرض کنید $S \subseteq b(p, r)$ و $R \subseteq C(p, r)$ است، شکل ۱۶.۱ را ببینید. مخروط‌های C_1, C_2, \dots, C_h را با رأس p و دارای زاویه‌ی $\theta = 2\pi/h$ در نظر بگیرید که h یک مقدار ثابت نسبتاً بزرگ است؛ در این جا فرض می‌شود $\theta = 1/18$ رادیان، و h یا همان تعداد مخروط‌ها، حداکثر ۱۱۴ است. این مخروط‌ها فضای \mathbb{R}^2 را افراز می‌کنند. فرض کنید $R_j = R \cap C_j$ نشان دهنده‌ی مجموعه نقاط R است که داخل مخروط C_j قرار می‌گیرد. شکل ۱۶.۱ را برای حالتی که $\theta = 22/5^\circ$ و تعداد مخروط‌ها ۱۶ است، ببینید. می‌توان زوج (S, R) را با

زوج‌های

$$(S, R_1), (S, R_2), \dots, (S, R_h)$$

جایگزین کرد؛ در این صورت هر یک از زوج‌های (S, R_j) ، به ازای هر $j = 1, \dots, h$ در تعریف دوم زوج‌های نیم مجزا، صدق می‌کنند؛ به عبارتی:

$$d(D_S, D_{R_j}) \geq (s - 1)r.$$

بنابراین می‌توان زوج نیم مجزای (S, R) با پارامتر s و طبق تعریف اول را، با تعداد ثابت (h) زوج نیم مجزا طبق تعریف دوم و با پارامتر $(s - 1) \in \mathcal{O}(s)$ ، جایگزین کرد. \square

فصل ۲

ساخت تجزیه نقاط به زوج‌های نیم-مجزا در

صفحه

اولین الگوریتم مطرح شده جهت ساخت $SSPD$ ، برای مجموعه نقاط در صفحه، توسط واراداراجان^۱ در مرجع [۲۴]، مطرح شد. این روش ویژگی‌های بهینه برای $SSPD$ را ندارد، از این لحاظ که یک نقطه در $SSPD$ ساخته شده با استفاده از این الگوریتم، می‌تواند در $O(\log^4 n)$ زوج ظاهر شود و وزن $SSPD$ از مرتبه‌ی $O(n \log^4 n)$ است که مقدار نسبتاً زیادی است. اما این کران‌ها در روش‌ها و الگوریتم‌های مطرح شده‌ی بعدی بهبود یافت. آبام و همکاران در مقاله‌ی [۳]، الگوریتمی برای ساخت $SSPD$ برای نقاط در صفحه، با استفاده از درخت نسبیت کراندار مطرح کردند که از نظر وزن بهتر از الگوریتم واراداراجان است. در این فصل، الگوریتم مطرح شده در مقاله‌ی [۳] بررسی می‌شود، که از تعریف اول زوج‌های کاملاً مجزا و تعریف دوم زوج‌های نیم مجزا استفاده می‌کند (در زیربخش ۱.۶.۱، تعاریف مربوطه ذکر شده است)، و تضمین می‌کند که به ازای هر دو نقطه، زوج یکتایی شامل این دو نقطه در $SSPD$ ساخته شده وجود دارد.

۱.۲ ساخت تجزیه نقاط به زوج‌های نیم مجزا برای نقاط در صفحه

۱.۱.۲ مقدمه

برای ساخت تجزیه نقاط به زوج‌های نیم مجزا^۲ در فضای \mathbb{R}^2 ، از درخت نسبیت کراندار^۳، که در زیر بخش ۲.۳.۱ از فصل یک توضیح داده شد، استفاده می‌شود. مجموعه نقاط P با n نقطه در صفحه (\mathbb{R}^2) و درخت نسبیت کراندار T برای این نقاط، داده شده است. برای هر گره v در درخت T ، نماد $pa(v)$ نشان دهنده‌ی پدر گره v ، و نماد $P(v)$ به عنوان زیرمجموعه‌ی کانونی v می‌باشد. لازم به ذکر است زیرمجموعه‌ی کانونی، زیرمجموعه‌ای از نقاط P است که در برگ‌های زیر درخت T_v ، که در v ریشه‌دار است، ذخیره شده است. وزن گره v تعداد نقاط داخل زیرمجموعه‌ی کانونی v است که با $|P(v)|$ نشان داده می‌شود. گفته می‌شود گره v دارای کلاس وزنی l است، اگر و تنها اگر به ازای یک مقدار صحیح^۴ l ، وزن

^۱Varadarajan

^۲SSPD

^۳BAR Tree

^۴Integer

به صورت $|P(v)| \leq n/2^\ell$ ، و وزن پدر v $(pa(v))$ ، به صورت $|P(pa(v))| > n/2^\ell$ باشد. مجموعه گره‌هایی که در کلاس وزنی ℓ هستند، با $N(\ell)$ نشان داده می‌شوند. ریشه‌ی درخت \mathcal{T} ، دارای وزن n است و از آنجا که این گره دارای پدری نیست، بنابراین کلاس وزنی این گره، صفر می‌باشد. همچنین همه‌ی گره‌های برگ در \mathcal{T} دارای وزن حداکثر یک بوده و واضح است که در کلاس وزنی $\lfloor \log n \rfloor$ قرار می‌گیرند. بنابراین کلاس‌های وزنی ℓ ، مقادیری بین 0 تا $\lfloor \log n \rfloor$ را می‌پذیرند. لازم به ذکر است که یک گره v در \mathcal{T} ، می‌تواند در هیچ کلاس وزنی قرار نگیرد، یا این‌که همزمان در چند کلاس وزنی واقع شود. حالت اول وقتی اتفاق می‌افتد که برای مثال $|P(v)| = n/2^\ell - 1$ و $|P(pa(v))| = n/2^\ell$ باشد، یعنی فاصله‌ی وزن پدر و فرزند یک باشد. حالت دوم وقتی است که وزن گره v از وزن پدرش خیلی کوچک‌تر باشد در این صورت می‌توان به ازای ℓ ‌های مختلف رابطه‌ی $|P(v)| \leq n/2^\ell$ و $|P(pa(v))| > n/2^\ell$ را داشت.

لم ۱.۱.۲ در درخت \mathcal{T} ، در هر مسیر از ریشه تا برگ، دقیقاً یک گره با کلاس وزنی ℓ ، به ازای همه‌ی $0 \leq \ell \leq \ell_{\max}$ وجود دارد.

اثبات. همان‌طور که گفته شد، ریشه‌ی درخت \mathcal{T} ، دارای وزن n و کلاس وزنی صفر است، همچنین همه‌ی گره‌های برگ دارای وزن حداکثر یک بوده و واضح است که در کلاس وزنی $\lfloor \log n \rfloor$ قرار می‌گیرند. برای اثبات، یک مقدار $1 \leq \ell \leq \ell_{\max} - 1$ و یک گره‌ی برگ دلخواه مانند v را در نظر بگیرید؛ با حرکت از ریشه به سمت v ، دو حالت پیش می‌آید. حالت اول: رسیدن به اولین گره‌ی w ، که دارای وزن $|P(w)| \leq n/2^\ell$ و در نتیجه $|P(pa(w))| > n/2^\ell$ است، بنابراین w ، گره‌ای است که در کلاس وزنی ℓ قرار دارد و در مسیر ریشه تا برگ می‌باشد، و در نتیجه، گره‌ی مطلوب است. حالت دوم: در مسیر ریشه تا v ، هیچ گره‌ای با ویژگی‌های w وجود نداشته باشد، در این صورت مسیر حرکت، تا برگ v ادامه می‌یابد. از آنجا که وزن v حداکثر یک است پس $|P(v)| \leq n/2^\ell$ ، و چون v اولین گره در مسیر ریشه تا v است که دارای وزن کم‌تر از $n/2^\ell$ است، بنابراین $|P(pa(v))| > n/2^\ell$. در نتیجه v همان گره‌ی مطلوب است که در کلاس وزنی ℓ قرار می‌گیرد. \square

گره‌ی $v \in N(\ell)$ را در نظر بگیرید، منظور از ℓ -پدر^۵ گره‌ی v ، گره‌ای مانند $\mu \in N(\ell - 1)$ است که در مسیر ریشه تا گره v ، به انضمام خود v ، وجود دارد. طبق لم ۱.۱.۲، μ موجود و منحصر به فرد است. ℓ -پدر گره v با نماد $pa(\ell, v)$ نشان داده می‌شود و v ، ℓ -فرزند^۶ برای μ است. از آنجا که هر گره می‌تواند در چند کلاس وزنی باشد، بنابراین v ، خود می‌تواند ℓ -پدر برای خودش باشد، یعنی $v \in N(\ell)$ و $v \in N(\ell - 1)$. همان‌طور که در فصل یک، زیربخش ۲.۳.۱ ذکر شد، برای هر گره v در درخت \mathcal{T} ، ناحیه‌ای متناظر با v وجود دارد که در این‌جا با $\mathcal{R}(v)$ نشان داده می‌شود و این ناحیه دارای نرخ نسبت حداکثر α است. همچنین $\text{diam}(\mathcal{R}(v))$ نشان دهنده‌ی قطر ناحیه‌ی $\mathcal{R}(v)$ است. دایره‌ی دربرگیرنده‌ی ناحیه‌ی $\mathcal{R}(v)$ را D_v در نظر بگیرید، لم زیر رابطه‌ی بین فاصله‌ی مابین نواحی و فاصله‌ی مابین دایره‌های دربرگیرنده‌ی نواحی را بیان می‌کند.

لم ۲.۱.۲ فرض کنید v و μ دو گره در درخت \mathcal{T} باشند، اگر به ازای ناحیه‌های متناظر با این دو گره رابطه‌ی

$$d(\mathcal{R}(v), \mathcal{R}(\mu)) \geq \frac{(s+1)\alpha}{2} \cdot \min\{\text{diam}(\mathcal{R}(v)), \text{diam}(\mathcal{R}(\mu))\}$$

برقرار باشد، آنگاه دو دایره‌ی $D_v \supset \mathcal{R}(v)$ و $D_\mu \supset \mathcal{R}(\mu)$ وجود دارند به طوری که رابطه‌ی

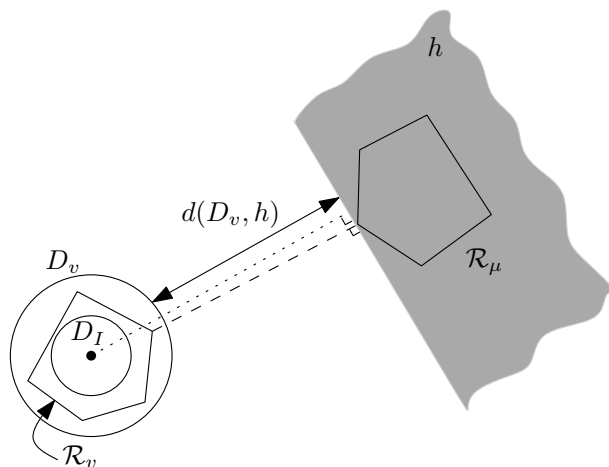
$$d(D_v, D_\mu) \geq s \cdot \min\{\text{radius}(D_v), \text{radius}(D_\mu)\}$$

برای این دو دایره برقرار است.

اثبات. بدون از دست رفتن کلیت مساله، فرض کنید $\text{diam}(\mathcal{R}(v)) \leq \text{diam}(\mathcal{R}(\mu))$ است؛ همچنین فرض کنید h نیم صفحه‌ای است که فاصله‌ی بین h و $\mathcal{R}(v)$ برابر با $d(\mathcal{R}(v), \mathcal{R}(\mu))$ است؛ در واقع می‌توان h را به عنوان دایره‌ای با شعاع نامتناهی، که ناحیه‌ی $\mathcal{R}(\mu)$ را در برمی‌گیرد، در نظر گرفت. لذا می‌توان گفت $h = D_\mu$. شکل ۱.۲ را ببینید. حال دو دایره‌ی هم مرکز D_I و D_v ، به طوری که $D_I \subset \mathcal{R}(v) \subset D_v$ و $\text{radius}(D_v)/\text{radius}(D_I) = \alpha$ ، را در نظر بگیرید. رابطه‌ی زیر برای دو

^۵ ℓ -parent

^۶ ℓ -child



شکل ۱.۲: مربوط به اثبات لم ۲.۱.۲

دایره واضح است:

$$2 \text{ radius}(D_I) \leq \text{diam}(\mathcal{R}(v)) \leq 2 \text{ radius}(D_v)$$

حال می توان گفت:

$$\begin{aligned} d(D_v, h) &= d(D_I, h) - \text{radius}(D_v) + \text{radius}(D_I) = d(D_I, h) - (\text{radius}(D_v) - \text{radius}(D_I)) \\ &= d(D_I, h) - (\alpha - 1) \cdot \text{radius}(D_I) \\ &\geq d(D_I, h) - \alpha \cdot \text{radius}(D_I) \\ &\geq d(D_I, h) - \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \text{diam}(\mathcal{R}(v)) \\ &\geq d(\mathcal{R}(v) - \mathcal{R}(\mu)) - \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \text{diam}(\mathcal{R}(v)). \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $h = D_\mu$ است، می توان در رابطه، به جای h ، $D(\mu)$ را قرار داد. در نتیجه:

$$\begin{aligned}
d(D_v, D_\mu) &\geq d(\mathcal{R}(v) - \mathcal{R}(\mu)) - \frac{\alpha}{\Psi} \cdot \text{diam}(\mathcal{R}(v)) \\
&\geq \frac{(s+1)\alpha}{\Psi} \cdot \text{diam}(\mathcal{R}(v)) - \frac{\alpha}{\Psi} \cdot \text{diam}(\mathcal{R}(v)) \\
&= \frac{s \cdot \alpha}{\Psi} \cdot \text{diam}(\mathcal{R}(v)) \\
&\geq s \cdot \alpha \cdot \text{radius}(D_I) \\
&= s \cdot \text{radius}(D_v) \\
&= s \cdot \min\{\text{radius}(D_v), \text{radius}(D_\mu)\}.
\end{aligned}$$

□ و به این ترتیب اثبات کامل است.

۲.۱.۲ ساخت SSPD با استفاده از درخت نسبیت کراندار برای نقاط در صفحه

مجموعه نقاط $P \in \mathbb{R}^2$ با n نقطه، داده شده است. الگوریتم زیر یک SSPD با پارامتر $s > 0$ با نام S ، برای مجموعه نقاط P می‌سازد:

الف) ساخت یک درخت نسبیت کراندار T برای مجموعه نقاط P و محاسبه‌ی کلاس وزنی همه‌ی گره‌های داخل T .

ب) به ازای هر کلاس وزنی $0 \leq \ell \leq \ell_{\max}$ ، همه‌ی زوج‌های $(P(v), P(\mu))$ که دارای شرایط زیر هستند، به S افزوده می‌شوند:

شرط اول) گره‌های v و μ در یک کلاس وزنی باشند. به عبارتی $v, \mu \in N(\ell)$ باشد.

شرط دوم) گره‌های v و μ هر دو برگ‌های T باشند، یا این‌که رابطه‌ی

$$d(\mathcal{R}(v), \mathcal{R}(\mu)) \geq \frac{(s+1)\alpha}{\Psi} \cdot \min\{\text{diam}(\mathcal{R}(v)), \text{diam}(\mathcal{R}(\mu))\}$$

برقرار باشد، که با توجه به لم ۲.۱.۲ می‌توان گفت زوج $(P(v), P(\mu))$ ، نیم مجزا با پارامتر s است.

شرط سوم) رابطه‌ی

$$d(\mathcal{R}(pa(\ell, v)), \mathcal{R}(pa(\ell, \mu))) < \frac{(s+1)\alpha}{\Psi} \cdot \min\{\text{diam}(\mathcal{R}(pa(\ell, v))), \text{diam}(\mathcal{R}(pa(\ell, \mu)))\}$$

برقرار باشد.

۳.۱.۲ یافتن زوج‌های SSPD

برای به دست آوردن زوج‌هایی که دارای سه شرط ذکر شده هستند، درخت نسبیت کراندار T ، دارای مشکلاتی است: اولاً ممکن است حاوی گره‌هایی باشد که عضو هیچ یک از کلاس‌های وزنی نیستند، ثانیاً ممکن است فاصله‌ی بین یک گره با l -پدرش، بیش از یک یال باشد، لذا در بررسی شرط سوم برای آن گره، برای یافتن l -پدرش، دردسرهایی وجود دارد. در نتیجه می‌بایست T را به گونه‌ای تغییر داد که مشکلاتی که برای گزارش زوج‌ها، وجود دارد را برطرف کرده و با الگوریتمی، زوج‌های مطلوب را گزارش کند. به این منظور درخت T' ، با انجام عملیات زیر بر روی درخت T ، ساخته می‌شود:

□ تمام گره‌های v در درخت T ، که عضو هیچ کلاس وزنی نیستند، حذف شده و فرزندان آن (در صورت وجود)، به پدر v متصل می‌شوند.

□ در صورتی که گره‌ای عضو k ($k > 1$) کلاس وزنی باشد، در درخت T' ، به تعداد k بار، در سطوح مختلف، به ازای کلاس‌های مختلفی که عضو آن‌ها است، تکرار می‌شود.

به این ترتیب در درخت T' ، سطح هر گره، نشان دهنده‌ی کلاس وزنی آن گره است، یعنی در سطح i ام درخت، گره‌های دارای کلاس وزنی i قرار می‌گیرند. از آنجا که کلاس‌های وزنی مقادیری بین $0 \leq \ell \leq \lfloor \log n \rfloor$ دارند، در نتیجه عمق درخت T' از مرتبه‌ی $O(\log n)$ است. همچنین l -پدر هر گره، همان پدر واقعی آن است. با توجه به لم ۴.۱.۲ (در ادامه اثبات می‌شود)، هر گره در درخت T ، به ازای $0 \leq \ell \leq \lfloor \log n \rfloor$ ، برای تعداد ثابتی از گره‌ها l -پدر است، بنابراین در درخت T' ، که پدر واقعی هر گره همان l -پدر آن است، درجه‌ی هر گره ثابت است.

۴.۱.۲ یافتن زوج‌ها

پس از ساخت درخت T' ، می‌توان با استفاده از الگوریتم زیر، زوج‌های متعلق به SSPD را، گزارش کرد: برای اثبات درستی الگوریتم ۲، یا به عبارتی برای اثبات این که مجموعه زوج‌های $(P(v), P(\mu))$ که توسط الگوریتم ۲ گزارش می‌شوند، به درستی تشکیل یک SSPD برای مجموعه نقاط P می‌دهند، لم ۳.۱.۲ آورده شده است. توجه کنید برای نشان دادن این که زوج‌های گزارش شده، سه شرط ذکر شده برای

دو گرهی u و v که در ابتدا هر دو ریشه‌ی T' هستند.

خروجی: زوج‌های $SSPD$.

۱: اگر شرط

$$d(\mathcal{R}(v), \mathcal{R}(\mu)) \geq \frac{(s+1)\alpha}{2} \cdot \min\{\text{diam}(\mathcal{R}(v)), \text{diam}(\mathcal{R}(\mu))\}$$

برقرار بود، زوج $(P(u), P(v))$ را گزارش کن.

۲: در غیر این صورت، فرض کنید u_1, \dots, u_r فرزندان u ، و $v_1, \dots, v_{r'}$ فرزندان v باشند:

الگوریتم را به ازای هر u_i و v_j ، به طوری که $1 \leq i \leq r$ و $1 \leq j \leq r'$ ، اجرا کن.

زوج‌های $SSPD$ را دارند، اثبات‌ها روی درخت نسبت کراندار T انجام می‌شود، و از آنجا که درخت T'

از روی درخت T ساخته می‌شود، بدیهی است که این اثبات‌ها برای T' نیز برقرار است.

لم ۳.۱.۲ مجموعه زوج‌های مانند $(P(v), P(\mu))$ ، با شرایط ذکر شده، که توسط الگوریتم بالا گزارش

می‌شوند، یک $SSPD$ برای مجموعه نقاط P ، با پارامتر s می‌سازند.

اثبات. $SSPD$ ساخته شده توسط الگوریتم را \mathcal{S} بنامید. برای اثبات این که \mathcal{S} یک $SSPD$ است،

باید دو چیز ثابت شود. اول: همه‌ی زوج‌های متعلق به \mathcal{S} ، نیم مجزا هستند. دوم: به ازای هر دو نقطه‌ی

دلخواه در P ، زوجی در \mathcal{S} شامل این دو نقطه، وجود دارد.

اثبات قسمت اول: با توجه به خط ۱ در الگوریتم ۲، زوج‌هایی در \mathcal{S} گزارش می‌شوند که شرط نیم

مجزا بودن را داشته باشند.

اثبات قسمت دوم: به ازای هر دو نقطه‌ی $p, q \in P$ ، زوج یکتایی مانند $(P(v), P(\mu)) \in \mathcal{S}$ وجود

دارد به طوری که $p \in P(v)$ و $q \in P(\mu)$ (یا برعکس). برای اثبات این ادعا، فرض کنید به ازای هر

مقدار $0 \leq \ell \leq \ell_{\max}$ ، نماد $v(p, \ell)$ ، نشان دهنده‌ی گره‌ی داخل کلاس وزنی $N(\ell)$ است، که در مسیر

ریشه تا برگ p واقع شده است. طبق لم ۱.۱.۲ چنین گره‌ای به ازای هر مقدار $0 \leq \ell \leq \ell_{\max}$ موجود

و منحصر به فرد است. به ازای کلاس وزنی صفر داریم $v(p, 0) = v(q, 0) = \text{root}(T)$. بنابراین

زیرمجموعه‌های کانونی $P(v(p, 0))$ و $P(v(q, 0))$ ، با هم یکسان و شامل همه‌ی مجموعه نقاط P است،

در نتیجه دو مجموعه کانونی $(P(v(p, \circ))$ و $(P(v(q, \circ))$ نمی‌توانند نیم مجزا باشند؛ بنابراین کلاس وزنی زوجی که شامل نقاط p و q است، از صفر بیش‌تر می‌باشد. حال دو حالت در نظر گرفته می‌شود. حالت اول: گره‌های $v, \mu \in N(\ell)$ به ازای $1 \leq \ell \leq (\ell_{\max} - 1)$ ، در مسیر ریشه تا برگ‌های p و q (v و μ ممکن است برگ‌های p و q نیز باشند) وجود دارند که $p \in P(v)$ و $q \in P(\mu)$ (یا بر عکس) است و زوج $(P(v), P(\mu))$ در شرط دوم و سوم ذکر شده، صدق می‌کند؛ بنابراین این زوج توسط الگوریتم گزارش می‌شود. با توجه به شرط سوم، واضح است که زوج $(P(v), P(\mu))$ اولین زوج نیم مجزا، شامل p و q است که در مسیر ریشه تا برگ p و q وجود دارد. از آنجا که ناحیه‌ی هر فرزند زیرمجموعه‌ی ناحیه‌ی پدرش (اجدادش) است، در نتیجه هیچ یک از فرزندان (نوه‌های) v و μ ، شرط سوم را ندارند و بنابراین نمی‌توانند به عنوان زوجی در \mathcal{S} گزارش شوند؛ لذا $(P(v), P(\mu))$ یک زوج منحصر به فرد شامل نقاط p و q می‌باشد. به این ترتیب به ازای هر دو نقطه‌ی دلخواه ثابت شد زوج منحصر به فردی شامل دو نقطه، در \mathcal{S} وجود دارد و لم اثبات می‌شود. حالت دوم: گره‌های v, μ با شرایط ذکر شده در حالت اول، موجود نباشند. بنابراین گره‌های $v(p, \ell_{\max})$ و $v(q, \ell_{\max})$ ، به ترتیب گره‌های برگ شامل نقاط p و q می‌باشند، که شرط سوم برای ℓ -پدرانشان برقرار بوده است. از طرفی به دلیل این که این دو گره تک نقطه‌ای هستند، نیم مجزا می‌باشند (شرط دوم)، بنابراین زوج (p, q) ، دارای شرط اول تا سوم بوده و توسط الگوریتم، داخل مجموعه‌ی \mathcal{S} ، گزارش می‌شوند. \square

۵.۱.۲ خاصیت یکنواختی SSPD ساخته شده

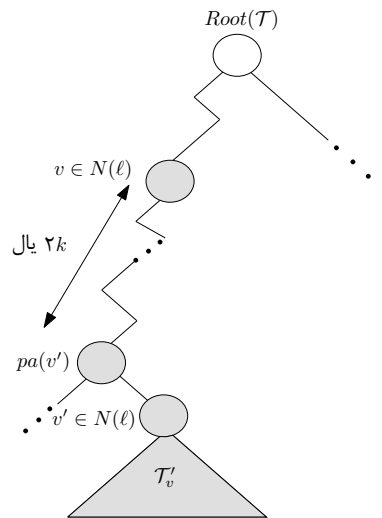
خاصیت یکنواختی^۶ برای SSPD ساخته شده‌ی \mathcal{S} ، که با استفاده از روش مطرح شده در بخش ۲.۱.۲ ساخته شده است، به این صورت تعریف می‌شود: فرض کنید $p, q \in P$ دو نقطه باشند که داخل مجموعه‌ی X از زوج $(A_i, B_i) \in \mathcal{S}$ قرار می‌گیرند؛ بنابراین $X = A_i$ یا $X = B_i$ است. همچنین فرض کنید $(A_j, B_j) \in \mathcal{S}$ زوج یکتایی باشد که $p \in A_j$ و $q \in B_j$ (یا بر عکس) است؛ آنگاه وزن هر یک از مجموعه نقاط A_j و B_j کمتر از وزن مجموعه نقاط X است، این خاصیت با توجه به ساختار درخت

^۶Monotonicity

نسبیت کراندار که برای ساخت $SSPD$ استفاده می‌شود، واضح است؛ از این لحاظ که مجموعه نقاط A_j و B_j ، زیرمجموعه‌ی نقاط X هستند.

۶.۱.۲ آنالیز وزن و زمان ساخت $SSPD$ محاسبه شده

برای کراندار کردن وزن $SSPD$ ، به دست آمده، ابتدا ثابت می‌شود که یک گره‌ی دلخواه در درخت نسبیت کراندار، می‌تواند برای چه تعداد از گره‌ها ℓ -پدر باشد. لم زیر این هدف را دنبال می‌کند.



شکل ۲.۲: مربوط به اثبات لم ۴.۱.۲.

لم ۴.۱.۲ هر گره مانند v در درخت T ، حداکثر می‌تواند برای تعداد ثابتی از گره‌های T ، به عنوان ℓ -پدر باشد.

اثبات. فرض کنید گره $v' \in T$ در کلاس وزنی $N(\ell)$ ، وجود داشته باشد به طوری که گره v عضو کلاس وزنی $N(\ell - 1)$ ، به عنوان ℓ -پدر v' باشد. یا به عبارتی $v = pa(\ell, v')$ باشد. شکل ۲.۲ را ببینید. با توجه به لم ۱.۱.۲، v' عضو زیر درخت $T_{v'}$ (زیر درخت ریشه‌دار در v) است. از آنجا که v' در کلاس وزنی $N(\ell)$ است، پس $|v'| \leq n/2^\ell$ ، بنابراین هیچ گره‌ای در زیر درخت $T_{v'}$ نمی‌تواند در کلاس وزنی $N(\ell)$ باشد و در نتیجه نمی‌تواند گره v را به عنوان ℓ -پدر خود داشته باشد. گره v' در کلاس وزنی $N(\ell)$ است بنابراین وزن گره پدر (واقعی) آن، به صورت $|pa(v')| > n/2^\ell$ است. از طرفی v در کلاس وزنی $N(\ell - 1)$ قرار دارد و $|v| \leq n/2^{\ell-1}$ می‌باشد، همان‌طور که در فصل یک ذکر شد، در درخت

نسبیت کراندار T ، وزن هر گره، با دو سطح پایین آمدن، به اندازه‌ی ضریب β کاهش می‌یابد، یعنی اگر از v دو سطح به سمت پایین حرکت شود، گره‌ی با وزن حداکثر $\beta \cdot (n/2^{\ell-1})$ به دست می‌آید. بنابراین در مسیر بین گره v تا گره $pa(v')$ وزن v با ضریب β^k ، کاهش می‌یابد، که $\beta^k = 1/2$ است (زیرا $\beta^k = n/2^\ell \cdot (n/2^{\ell-1})$). در نتیجه تعداد یال‌های موجود در مسیر v تا $pa(v')$ برابر با $2k$ می‌باشد. به طور خلاصه می‌توان گفت مسیر بین گره v تا پدران واقعی گره‌هایی مانند v' که به عنوان ℓ -پدر آن‌ها است، حداکثر $2k$ یال است. اگر شماره‌ی سطح شامل گره v ، صفر در نظر گرفته شود (گره‌های مانند v' در زیر درخت T_v هستند)، پس حداکثر شماره سطح برای گره‌هایی مانند v' ، $2k$ سطح پایین‌تر از سطح v خواهد بود، و تعداد گره‌ها در این سطح حداکثر 2^{2k} می‌باشد. از آنجا که $\beta^k = 1/2$ و $1/2 \leq \beta \leq 1$ ، پس k مقدار ثابتی خواهد بود و در نتیجه v برای حداکثر 2^{2k} (تعداد ثابت) گره، به عنوان ℓ -پدر می‌باشد. \square

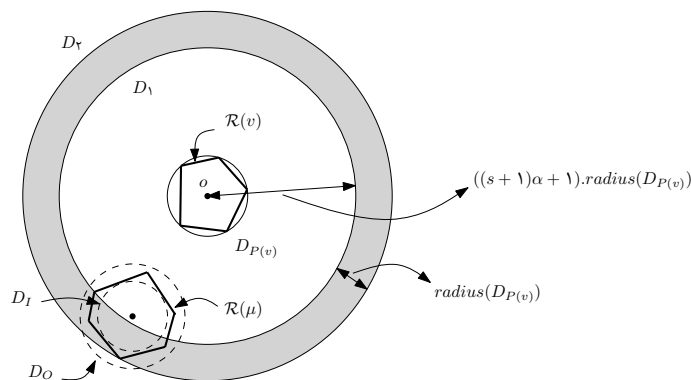
دانستن اینکه هر کلاس وزنی مانند ℓ ، چه تعداد گره را شامل می‌شود، برای به دست آوردن وزن $SSPD$ اهمیت دارد. لم زیر این هدف را دنبال می‌کند:

۵.۱.۲ فرض کنید $0 \leq \ell \leq \ell_{\max}$ باشد. تعداد گره‌هایی که در درخت نسبیت وجود دارند و در کلاس وزنی $N(\ell)$ قرار می‌گیرند، حداکثر $O(2^\ell)$ است.

اثبات. همان‌گونه که قبلاً تعریف شد، گره‌ی v در کلاس وزنی $N(\ell)$ است، اگر $|P(v)| \leq n/2^\ell$ و $|P(pa(v))| > n/2^\ell$ باشد. حال مجموعه‌ی $P(N)$ را به صورت:

$$P(N) = \{ \text{پدر آن دسته از گره‌هایی که در کلاس وزنی } \ell \text{ هستند} \}$$

در نظر بگیرید. برای کراندار کردن تعداد گره‌های داخل $N(\ell)$ ، کافی است تعداد گره‌های $P(N)$ به دست آورده شود. وزن هر گره در مجموعه‌ی $P(N)$ از $n/2^\ell$ بیش‌تر است. زیرمجموعه‌ی کانونی گره‌های عضو $|P(N)|$ با یکدیگر اشتراک ندارند و مجموع نقاط در زیرمجموعه‌ی کانونی همه‌ی گره‌های داخل $P(N)$ ، حداکثر n است؛ بنابراین می‌توان گفت تعداد گره‌های $P(N)$ ، حداکثر $2^\ell = n/(n/2^\ell)$ است. از آنجا که درخت نسبیت، یک درخت دودویی است، بنابراین هر گره در $P(N)$ ، پدر دو گره است، لذا تعداد گره‌های داخل کلاس وزنی $N(\ell)$ با $O(2^\ell)$ کراندار می‌شود. \square



شکل ۳.۲: مربوط به اثبات لم ۶.۱.۲

لم ۶.۱.۲ فرض کنید $0 \leq \ell \leq \ell_{\max}$ و $\bar{\mathcal{S}}(\ell)$ مجموعه‌ای از همه‌ی زوج‌های مانند (v, μ) باشد، به طوری که $v, \mu \in N(\ell)$ و رابطه‌ی

$$d(\mathcal{R}(v), \mathcal{R}(\mu)) < \frac{(s+1)\alpha}{2} \cdot \min\{\text{diam}(\mathcal{R}(v)), \text{diam}(\mathcal{R}(\mu))\}$$

برقرار باشد، آنگاه تعداد زوج‌های $\bar{\mathcal{S}}(\ell)$ برابر با:

$$|\bar{\mathcal{S}}(\ell)| = \mathcal{O}(\alpha^4 \cdot (s+1)^2 \cdot 2^\ell)$$

و مجموع وزن این زوج‌ها برابر با:

$$\sum_{(v, \mu) \in \bar{\mathcal{S}}(\ell)} (|P(v)| + |P(\mu)|) = \mathcal{O}(\alpha^4 \cdot (s+1)^2 \cdot n)$$

می‌باشد.

اثبات. برای اثبات، ابتدا گره‌ها در زوج $(v, \mu) \in \bar{\mathcal{S}}$ ، به گونه‌ای مرتب می‌شوند که گره‌ای که ناحیه‌ی متناظرش دارای قطر کمتری است، اولین گره در زوج باشد، یعنی $\text{diam}(\mathcal{R}(v)) \leq \text{diam}(\mathcal{R}(\mu))$. ادعا می‌شود گره v ، در تعداد ثابتی زوج، به عنوان گره اول، قرار می‌گیرد. برای اثبات این ادعا، فرض کنید (v, μ) زوج مرتب شده‌ی دلخواهی باشد. فرض کنید $D_{P(v)}$ کوچک‌ترین دایره‌ی دربرگیرنده‌ی مجموعه نقاط $P(v)$ ، با مرکز o و شعاع $\text{radius}(D_{P(v)})$ است.

حلقه‌ی A به مرکز o ، با شعاع داخلی $r_1 = ((s+1)\alpha + 1) \cdot \text{radius}(D_{P(v)})$ (دایره‌ی D_1 به مرکز o و شعاع r_1)، و شعاع خارجی $r_2 = r_1 + \text{radius}(D_{P(v)})$ (دایره‌ی D_2 به مرکز o و شعاع r_2) را

در نظر بگیرید. شکل ۳.۲ را ببینید. توجه کنید رابطه‌ی

$$\text{diam}(\mathcal{R}(v))/2 \leq \text{radius}(D_{P(v)}) \leq \text{diam}(\mathcal{R}(v)) \quad (1-2)$$

و در نتیجه رابطه‌ی

$$r_1 \geq ((s+1)\alpha + 1) \cdot \text{diam}(\mathcal{R}(v))/2 \quad (2-2)$$

برقرار است. برای زوج (v, μ) رابطه‌ی $d(\mathcal{R}(v), \mathcal{R}(\mu)) < \frac{(s+1)\alpha}{2} \cdot \text{diam}(\mathcal{R}(v))$ برقرار است، بنابراین با توجه به رابطه‌ی ۲-۲، ناحیه‌ی $\mathcal{R}(\mu)$ با دایره‌ی D_1 برخورد دارد. شکل ۳.۲ را ببینید. دو حالت در نظر گرفته می‌شود:

حالت اول: قسمتی از ناحیه‌ی $\mathcal{R}(\mu)$ بیرون از دایره‌ی D_2 قرار می‌گیرد. با توجه به لم بسته‌بندی ۴.۵.۱ که در فصل یک مطرح شد، حداکثر $\mathcal{O}(\alpha^3(s+1)) = \mathcal{O}(\alpha^3(r_1/r_2 - r_1))$ ناحیه با این ویژگی وجود دارند.

حالت دوم: ناحیه‌ی $\mathcal{R}(\mu)$ کاملاً داخل دایره‌ی D_2 قرار می‌گیرد. نرخ نسبیت ناحیه‌ی $\mathcal{R}(\mu)$ حداکثر α است، یعنی دو دایره‌ی D_I و D_O به طوری که $D_I \subset \mathcal{R}(\mu) \subset D_O$ ، وجود دارند که $\frac{\text{radius}(D_O)}{\text{radius}(D_I)} \leq \alpha$ می‌باشد. بنابراین نسبت مساحت دو دایره‌ی D_I و D_O ، به صورت $\text{Area}(D_O)/\text{Area}(D_I) \leq \alpha^2$ است ($\text{Area}(D)$ مساحت دایره‌ی D). در نتیجه می‌توان گفت:

$$\begin{aligned} \text{Area}(\mathcal{R}(\mu)) &\geq \text{Area}(D_I) \\ &\geq (1/\alpha^2) \cdot \text{Area}(D_O) \\ &= (1/\alpha^2) \cdot \pi \cdot (\text{radius}(D_O))^2 \\ &\geq (1/(2\alpha)^2) \cdot \pi \cdot (\text{diam}(\mathcal{R}(\mu)))^2 \\ &\geq (1/(2\alpha)^2) \cdot \pi \cdot (\text{diam}(\mathcal{R}(v)))^2 \end{aligned} \quad (3-2)$$

از طرفی با توجه به رابطه‌ی ۱-۲، $\text{diam}(\mathcal{R}(v)) \geq \text{radius}(D_{P(v)})$ ، همچنین مقدار

$$r_2 = ((s+1)\alpha + 2) \cdot \text{radius}(D_{P(v)})$$

$$\text{radius}(D_{P(v)}) = \frac{r_2}{(s+1)\alpha + 2} \leq \text{diam}(\mathcal{R}(v)) \quad (4-2)$$

نتیجه می‌شود. پس با توجه به دو رابطه‌ی (۳-۲) و (۴-۲)، می‌توان گفت:

$$Area(\mathcal{R}(\mu)) \geq \frac{\pi r_{\mu}^2}{(2\alpha)^2 \cdot ((s+1)\alpha + 2)^2}$$

از طرفی مساحت دایره‌ی D_{μ} برابر با πr_{μ}^2 است، بنابراین می‌توان گفت داخل دایره‌ی D_{μ} ، حداکثر $O((2\alpha)^4 (s+1)^2)$ ناحیه مانند $\mathcal{R}(\mu)$ ، وجود دارد (نواحی در درخت نسبیت، مجزا از یکدیگرند). با توجه به دو حالت ممکن برای ناحیه‌ی متناظر با گره μ ، نتیجه می‌شود تعداد کل زوج‌هایی که گره v به عنوان اولین گره در زوج وجود دارد، حداکثر $O(2\alpha^4 (s+1)^2)$ است. از آنجا که تعداد گره‌ها در کلاس وزنی $N(\ell)$ برابر با $O(2^{\ell})$ است (لم ۵.۱.۲)، پس می‌توان به جای گره v در زوج‌هایی که v اولین گره آن‌ها است، حداکثر $O(2^{\ell})$ گره، جایگزین کرد که هر کدام با $O((2\alpha)^4 (s+1)^2)$ گره دیگر و دارای قطر بیشتر، تشکیل زوجی می‌دهند که عضو $\bar{\mathcal{S}}(\ell)$ است. بنابراین $|\bar{\mathcal{S}}(\ell)| = O(\alpha^4 \cdot (s+1)^2 \cdot 2^{\ell})$ خواهد بود. برای کراندار کردن وزن مجموعه‌ی $\bar{\mathcal{S}}(\ell)$ ، از آنجا که وزن هر گره $v \in N(\ell)$ ، به صورت $|P(v)| \leq n/\ell^2$ است، پس می‌توان گفت:

$$\sum_{(v,\mu) \in \bar{\mathcal{S}}} (|P(v)| + |P(\mu)|) \leq |\bar{\mathcal{S}}(\ell)| \cdot 2 \cdot (n/2^{\ell}) \in O(\alpha^4 \cdot (s+1)^2 \cdot n)$$

□

به این ترتیب لم اثبات شد.

قبل از این که روی وزن $SSPD$ بحث شود، ابتدا کرانی برای تعداد زوج‌های $SSPD$ معرفی می‌شود. فرض کنید \mathcal{S} ، $SSPD$ ساخته شده توسط الگوریتم مطرح شده در بخش ۲.۱.۲ باشد، طبق الگوریتم، اگر $(P(v), P(\mu))$ زوجی در \mathcal{S} باشد، نتیجه می‌شود که $v, \mu \in N(\ell)$ و $(pa(\ell, v), pa(\ell, \mu)) \in \mathcal{S}$ است (شرط‌های اول تا سوم در الگوریتم). با توجه به لم ۴.۱.۲، هر یک از گره‌های $pa(\ell, v)$ و $pa(\ell, \mu)$ می‌تواند برای 2^{2k} گره ℓ -پدر باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تعداد زوج‌ها در \mathcal{S} با عبارت

$$O\left(\sum_{\ell=0}^{\log n} 2^{2k} \cdot 2^{2k} \cdot |\bar{\mathcal{S}}(\ell)|\right)$$

کراندار می‌شود، که $|\bar{S}(\ell)|$ تعداد زوج‌های مجموعه‌ی $\bar{S}(\ell)$ را نشان می‌دهد. با استفاده از لم ۶.۱.۲، می‌توان گفت:

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}| &= \mathcal{O}\left(\sum_{\ell=0}^{\log n} 4^{2k} \cdot |\bar{S}(\ell)|\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\sum_{\ell=0}^{\log n} (4\alpha)^{2k} (s+1)^2 \cdot 2^\ell\right) \end{aligned} \quad (5-2)$$

با توجه به این که $\sum_{\ell=0}^{\log n} 2^\ell \in \mathcal{O}(n)$ است، با جایگذاری در رابطه‌ی ۵-۲، نتیجه می‌شود تعداد زوج‌های \mathcal{S} برابر با $|\mathcal{S}| = \mathcal{O}\left((4\alpha)^{2k} (s+1)^2 \cdot n\right)$ می‌باشد.

در نهایت لم زیر کرانی برای وزن $SSPD$ ساخته شده توسط الگوریتم بخش ۲.۱.۲، معرفی می‌کند.

لم ۷.۱.۲ فرض کنید \mathcal{S} ، $SSPD$ ساخته شده توسط الگوریتم مطرح شده در بخش ۲.۱.۲ است. می‌توان وزن \mathcal{S} را با

$$\sum_{(v,\mu) \in \mathcal{S}} (|P(v)| + |P(\mu)|) = \mathcal{O}\left(\alpha^4 \cdot (s+1)^2 \cdot n \log n\right)$$

کراندار کرد.

اثبات. تعداد کلاس‌های وزنی در درخت نسبت \mathcal{T} برابر با $\mathcal{O}(\log n)$ است، و گفته شد زوج‌های داخل \mathcal{S} ، به صورت $(P(v), P(\mu))$ هستند که v, μ عضو یک کلاس وزنی $N(\ell)$ هستند. لذا کافی است ثابت شود به ازای یک مقدار مشخص ℓ ، مجموع وزن زوج‌هایی که در \mathcal{S} وجود دارند و در کلاس وزنی ℓ (مقدار مشخص ℓ) هستند با عبارت زیر کراندار می‌شود:

$$\sum_{\substack{(v,\mu) \in \mathcal{S} \\ (v,\mu) \in N(\ell)}} (|P(v)| + |P(\mu)|) = \mathcal{O}\left(\alpha^4 \cdot (s+1)^2 \cdot n\right) \quad (6-2)$$

این ادعا این‌گونه ثابت می‌شود: برای هر گره v در درخت \mathcal{T} ، از آنجا که ℓ -پدر v در سطوح بالاتری نسبت به v قرار گرفته است (لم ۱.۱.۲ را ببینید)، بنابراین وزن زیرمجموعه‌ی کانونی آن، از وزن زیرمجموعه‌ی کانونی گره v بیشتر است، به عبارتی $|P(v)| \leq |P(pa(\ell, v))|$. بنابراین می‌توان در رابطه‌ی ۶-۲، مقدار بزرگ‌تر را جایگزین کرد و نوشت:

$$\sum_{\substack{(v,\mu) \in \mathcal{S} \\ (v,\mu) \in N(\ell)}} (|P(pa(\ell, v))| + |P(pa(\ell, \mu))|) \quad (7-2)$$

$(v, \mu) \in \mathcal{S}$ یک زوج در $SSPD$ است، بنابراین طبق شرط سوم الگوریتم، رابطه‌ی

$$d(\mathcal{R}(pa(\ell, v)), \mathcal{R}(pa(\ell, \mu))) < \frac{(s+1)\alpha}{2} \cdot \min\{\text{diam}(\mathcal{R}(pa(\ell, v))), \text{diam}(\mathcal{R}(pa(\ell, \mu)))\}$$

برقرار است، یعنی $(pa(v), pa(\mu)) \in \bar{\mathcal{S}}(\ell - 1)$ است. علاوه بر این، طبق لم ۴.۱.۲، هر گره می‌تواند

برای 2^{2k} گره، ℓ -پدر باشد، بنابراین رابطه‌ی ۲-۷ با عبارت

$$\sum_{(v, \mu) \in \bar{\mathcal{S}}(\ell-1)} 4^{2k} \mathcal{O}(|P(v)| + |P(\mu)|) \quad (۸-۲)$$

کراندار می‌شود، که $\bar{\mathcal{S}}(\ell - 1)$ مجموعه‌ی همه‌ی زوج‌های $(v, \mu) \in N(\ell - 1)$ است که

$$d(\mathcal{R}(v), \mathcal{R}(\mu)) < \frac{(s+1)\alpha}{2} \cdot \min\{\text{diam}(\mathcal{R}(v)), \text{diam}(\mathcal{R}(\mu))\}$$

برقرار است. طبق لم ۶.۱.۲، وزن همه‌ی زوج‌ها در $\mathcal{O}(\alpha^4 \cdot (s+1)^2 \cdot n)$ است، بنابراین

رابطه‌ی ۲-۸، با $\mathcal{O}(\alpha^4 \cdot (s+1)^2 \cdot n)$ کراندار می‌شود و به این ترتیب ادعا و در نتیجه لم اثبات می‌شود.

□

تنها مسأله‌ی باقیمانده، بررسی زمان ساخت $SSPD$ برای n نقطه در صفحه، توسط الگوریتم مطرح شده

در بخش ۲.۱.۲ است که به این صورت کراندار می‌شود: الگوریتم، ابتدا یک درخت نسبیت برای مجموعه

نقاط می‌سازد، زمان ساخت این درخت برابر با $\mathcal{O}(n \log n)$ است (قضیه‌ی ۱۳.۳.۱ از فصل یک)، همچنین

این درخت دارای $\mathcal{O}(n)$ گره است، و با توجه به این که تعداد کلاس‌های وزنی $\mathcal{O}(\log n)$ است، بنابراین

در زمان $\mathcal{O}(n \log n)$ می‌توان کلاس وزنی همه‌ی گره‌های درخت را معین کرد و درخت \mathcal{T}' را ساخت. در

مرحله‌ی آخر، الگوریتم یافتن زوج‌ها (الگوریتم ۲) اجرا می‌شود، اما زمان اجرای این الگوریتم چقدر است؟

برای پاسخ، گره‌هایی $u, v \in \mathcal{T}'$ را در نظر بگیرید. الگوریتم ۲، به ازای هر گره مانند u ، تمام گره‌های

مانند v را که با u هم سطح هستند، در شرط الگوریتم بررسی می‌کند؛ در صورتی که شرط برقرار بود

زوج $(P(u), P(v))$ گزارش می‌شود، در غیر این صورت، الگوریتم روی فرزندان u و v بازگشت می‌کند.

بنابراین زمان مصرفی برای بررسی گره‌ی u ، برابر است با تعداد گره‌هایی که با u هم سطح هستند. با توجه

به این که تعدادی از گره‌های هم سطح با u ، تشکیل زوج می‌دهند (در شرط الگوریتم صدق می‌کنند)، و

تعدادی تشکیل زوج نمی‌دهند، می‌توان زمان مصرفی برای بررسی گرهی u را به صورت زیر نوشت: $| \cdot |$. نشان دهنده‌ی تعداد)

$|$ گره‌هایی که با u تشکیل زوج می‌دهند $| + |$ گره‌هایی که با u تشکیل زوج نمی‌دهند $| =$ زمان بررسی u ابتدا تعداد گره‌هایی مانند v ، که با u هم‌سطح هستند اما با u تشکیل زوج نمی‌دهند، بررسی می‌شوند. این گره‌ها در شرط الگوریتم صدق نمی‌کنند، در نتیجه رابطه‌ی

$$d(\mathcal{R}(v), \mathcal{R}(\mu)) < \frac{(s+1)\alpha}{2} \cdot \min\{\text{diam}(\mathcal{R}(v)), \text{diam}(\mathcal{R}(\mu))\} \quad (9-2)$$

برای آن‌ها برقرار است. با توجه به این‌که نواحی متناظر با هر گره در درخت نسبیت کراندار، نواحی چاق هستند، می‌توان استدلال بسته بندی در فصل یک (۱.۵.۱)، را برای آن‌ها نیز بکار برد؛ در نتیجه تعداد گره‌هایی که در رابطه‌ی ۹-۲ صدق می‌کنند، حداکثر برابر با

$$\left(\frac{(s+1)\alpha}{2} \cdot \min\{\text{diam}(\mathcal{R}(v)), \text{diam}(\mathcal{R}(\mu))\} / \min\{\text{diam}(\mathcal{R}(v)), \text{diam}(\mathcal{R}(\mu))\} \right)^2 \in \mathcal{O}(s^2)$$

است. تعداد گره‌هایی که با u تشکیل زوج می‌دهند را $C(u)$ بنامید. بنابراین زمان مصرفی برای بررسی گرهی u ، از مرتبه‌ی $\mathcal{O}(s^2) + C(u)$ می‌باشد.

زمان مصرفی الگوریتم برابر با زمان مصرف شده برای بررسی هر یک از گره‌های $T' \in u$ است. از آنجا که درخت نسبیت کراندار T دارای $\mathcal{O}(n)$ گره است، و T' از روی درخت T ساخته می‌شود، بنابراین T' نیز حداکثر $\mathcal{O}(n)$ گره دارد و زمان مصرف شده توسط الگوریتم یافتن زوج‌ها، به صورت زیر کراندار می‌شود:

$$\sum_{u \in T'} \mathcal{O}(s^2) + C(u) \in \mathcal{O}(s^2 n) + \sum_{u \in T'} C(u) \quad (10-2)$$

برابر با تعداد زوج‌های $SSPD$ ساخته شده می‌باشد، که قبلاً اثبات شد این تعداد حداکثر $\sum_{u \in T'} C(u)$ است. بنابراین می‌توان رابطه‌ی ۱۰-۲، و در نتیجه زمان اجرای الگوریتم یافتن زوج‌ها (الگوریتم ۲) را با $\mathcal{O}(s^2 n)$ کراندار کرد. گفته شد که درخت T' در زمان $\mathcal{O}(n \log n)$ قابل ساخت، بنابراین زمان ساخت $SSPD$ حداکثر $\mathcal{O}((4\alpha)^{2k}(s+1)^2 n + n \log n)$ است.

نتیجه ۸.۱.۲ مجموعه‌ی P ، شامل n نقطه در \mathbb{R}^2 ، و پارامتر $s > 0$ داده شده است. می‌توان یک $SSPD$ با پارامتر s برای مجموعه نقاط P در زمان $\mathcal{O}((s+1)^2 n + n \log n)$ ساخت که دارای وزن $\mathcal{O}((4\alpha)^{2k} (s+1)^2 n)$ و دارای حداکثر $\mathcal{O}((4\alpha)^{2k} (s+1)^2 n \log n)$ زوج است.

فصل ۳

ساخت تجزیه نقاط به زوج‌های نیم-مجزا در

فضای \mathbb{R}^d

در این فصل یک روش بهینه برای تجزیه‌ی نقاط در فضای \mathbb{R}^d به زوج‌های نیم مجزا شرح داده می‌شود. بهینگی این روش نسبت به روش مطرح شده در فصل قبل، از لحاظ تعداد زوج‌هایی است که یک نقطه می‌تواند در آن ظاهر شود. ابتدا یک روش جهت ساخت $WSPD$ برای مجموعه نقاط با پراکندگی محدود بررسی می‌شود، سپس یک روش برای ساخت $SSPD$ مطرح می‌شود که این روش ساده است اما بهینگی مورد نظر را ندارد. در انتها، الگوریتم بهینه برای ساخت $SSPD$ بررسی می‌شود. مطالب این فصل برگرفته از مقاله‌ی آبام^۱ و هارپلد^۲ در مرجع [۶] است، که از تعریف دوم زوج‌های کاملاً مجزا و تعریف سوم زوج‌های نیم مجزا استفاده می‌کند، (در زیربخش ۱.۶.۱، تعاریف مربوطه ذکر شده است).

۱.۳ اصول و قضایای مورد نیاز

گاهی در تجزیه‌ی نقاط، لازم می‌شود تجزیه نقاط را برای زیر مجموعه‌های خاصی از نقاط داشته باشیم. مثلاً لازم نیست به ازای هر دو نقطه‌ی دلخواه مانند p و q زوجی در تجزیه زوج داشته باشیم، بلکه به ازای هر دو نقطه داخل دو زیر مجموعه‌ی خاص، زوجی یکتا بخواهیم که دو نقطه‌ی مذکور را پوشش دهد. طبق لم ۱.۱.۳، می‌توان هر تجزیه زوج داده شده را به گونه‌ای تفکیک کرد که تنها زوج نقاط خاصی را پوشش دهد.

لم ۱.۱.۳ تجزیه زوج \mathcal{W} از مجموعه نقاط P ، و $Q \subseteq P$ داده شده است. می‌توان تجزیه زوج \mathcal{W}' برای زوج‌های $Q \otimes \bar{Q}$ ، که تنها این زوج‌ها را پوشش دهد به طوری که $\bar{Q} = P \setminus Q$ ، را محاسبه کرد، که دارای ویژگی‌های زیر است:

الف) اگر نقطه‌ای در k زوج از \mathcal{W} ظاهر شود، در حداکثر k زوج از \mathcal{W}' ظاهر می‌شود.

ب) داریم: $\omega(\mathcal{W}') \leq \omega(\mathcal{W})$.

ج) تعداد زوج‌های \mathcal{W}' ، حداکثر دو برابر تعداد زوج‌های \mathcal{W} است.

د) به ازای هر زوج $(\mathcal{X}', \mathcal{Y}') \in \mathcal{W}'$ ، یک زوج $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathcal{W}$ ، وجود دارد به طوری که: $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$

و $\mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{Y}$.

^۱ Abam

^۲ Har-peled

ه) زمان محاسبه‌ی \mathcal{W}' ، از مرتبه‌ی خطی روی وزن \mathcal{W} است.

اثبات. قرار دهید: $\mathcal{W}' = \{(\mathcal{X} \cap Q, \mathcal{Y} \cap \bar{Q}), (\mathcal{X} \cap \bar{Q}, \mathcal{Y} \cap Q) \mid (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathcal{W}\}$

می‌توان زوج‌های $(X, Y) \in \mathcal{W}'$ که X یا Y تهی هستند را حذف کرد. به راحتی مشاهده می‌شود که در این صورت ویژگی‌های (الف) تا (د) برای \mathcal{W}' برقرار هستند؛ به عنوان نمونه برقرار بودن قسمت (ب)، اثبات می‌شود: به ازای یک زوج مانند $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathcal{W}$ ، این زوج با زوج‌های $(\mathcal{X} \cap Q, \mathcal{Y} \cap \bar{Q})$ و $(\mathcal{X} \cap \bar{Q}, \mathcal{Y} \cap Q)$ جایگزین می‌شود، از آن جا که $(|\mathcal{X} \cap Q| \cup |\mathcal{X} \cap \bar{Q}|) = |\mathcal{X}|$ و $(|\mathcal{Y} \cap Q| \cup |\mathcal{Y} \cap \bar{Q}|) = |\mathcal{Y}|$ است و در صورتی که یکی از اشتراک‌ها تهی بود، آن زوج حذف می‌شود، بنابراین واضح است که $\omega(\mathcal{W}') \leq \omega(\mathcal{W})$ □

در این فصل برای ساختن تجزیه نقاط به زوج‌های نیم مجزا، از دایره‌ها^۳ و حلقه‌های تفکیک‌کننده‌ی^۴ مجموعه نقاط استفاده می‌شود؛ سپس با توجه به فاصله‌ی بین این دایره‌ها و شرط نیم مجزا بودن و انجام یک سری اعمال که در ادامه شرح داده می‌شود، زوج‌های نیم مجزا گزارش می‌شوند. لم ۲.۱.۳ یکی از دایره‌هایی که به این منظور ساخته می‌شوند را معرفی می‌کند.

لم ۲.۱.۳ مجموعه‌ی P شامل n نقطه در فضای \mathbb{R}^d ، ثابت $\mu \geq 1$ و یک ثابت به حد کافی بزرگ $c > 1$ (که به d وابسته است)، داده شده است.

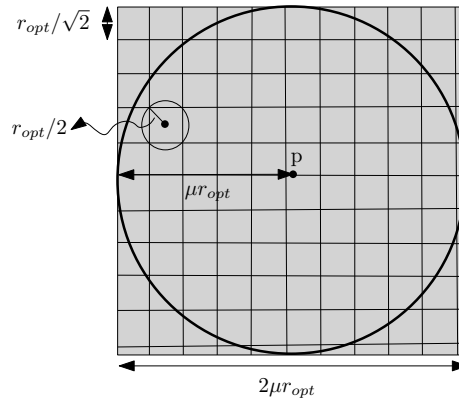
می‌توان در زمان مورد انتظار خطی $\mathcal{O}(n)$ ، دایره‌ی $b(p, r)$ به مرکز $p \in P$ ، شامل حداقل n/c از نقاط P را یافت به طوری که $b(p, \mu r)$ شامل حداکثر $n/2$ از نقاط P است.

اثبات. نقطه‌ی $p \in P$ را به صورت تصادفی^۵ انتخاب کنید، سپس دایره‌ی $b(p, r)$ به مرکز p و با کوچک‌ترین شعاع، که شامل حداقل n/c نقطه از P است، را محاسبه کنید. حال اگر دایره‌ی $b(p, \mu r)$ شامل حداکثر $n/2$ نقطه بود، آنگاه دایره‌ی مطلوب به دست آمده است و الگوریتم به پایان می‌رسد، در غیر این صورت نقطه‌ی تصادفی بعدی را انتخاب کرده و این روند را ادامه دهید تا به جواب برسید.

^۳Balls

^۴Separating Rings

^۵Random



شکل ۱.۳: شبکه بندی دایره‌ی $b(p, 2\mu r_{opt})$ در صفحه.

برای اثبات این که الگوریتم در هر تکرار با احتمال یکسان به جواب می‌رسد، کوچک‌ترین دایره به مرکز یکی از نقاط P که شامل حداقل $m = n/c$ نقطه است را در نظر بگیرید. فرض کنید $b(q, r_{opt})$ به مرکز $q \in P$ این دایره باشد. مشاهده می‌شود که هر دایره با شعاع $r_{opt}/2$ شامل کمتر یا مساوی m نقطه است (مرکز این دایره‌ها لزوماً نقطه‌ای از P نمی‌باشد).

قرار دهید $Q = P \cap b(q, r_{opt})$ ؛ از آنجا که مجموعه‌ی Q دارای حداقل m نقطه است، بنابراین هر نقطه‌ی $p \in P$ با احتمال حداقل $1/c$ ، داخل مجموعه‌ی Q قرار می‌گیرد. اگر به مرکز نقطه‌ای در مجموعه‌ی Q ، دایره‌ای به شعاع دو برابر r_{opt} رسم شود، واضح است که دایره‌ی رسم شده شامل حداقل m نقطه از P است. بنابراین در صورتی که نقطه‌ی تصادفی p داخل مجموعه‌ی Q باشد، می‌توان گفت دایره‌ی رسم شده به مرکز p و شعاع r ، به طوری که:

$$r \leq 2r_{opt} \quad , \quad \mu r \leq 2\mu r_{opt}.$$

است، شامل حداقل m نقطه از P می‌باشد.

حال اثبات می‌شود که دایره‌ی $b(p, \mu r)$ شامل حداکثر $n/2$ از نقاط است؛ از آنجا که فضای مورد بررسی فضای اقلیدسی با بعد مضاعف کراندار است (توضیحات مربوطه در زیربخش ۲.۱ از فصل یک آمده است)، در نتیجه دایره‌ی $b(p, \mu r)$ می‌تواند با $O(1)$ دایره با شعاع $r_{opt}/2$ پوشش داده شود. همچنین از آنجا که $\mu r \leq 2\mu r_{opt}$ است، دایره با شعاع μr را می‌توان با $O(1)$ دایره به شعاع μr_{opt} و در کل با

$\mathcal{O}(1)$ دایره به شعاع $r_{opt}/2$ پوشاند. حال جعبه‌ای که اضلاع آن موازی با محورهای مختصات است و مرکز آن نقطه‌ی p و دارای طول ضلع $2\mu r_{opt}$ است را در نظر بگیرید و آن را به شبکه‌ای^۶ با طول ضلع r_{opt}/\sqrt{d} افراز کنید، شکل ۱.۳ برای حالت دو بعدی ببینید. این شبکه دارای حداکثر $(2\mu\sqrt{d} + 1)^d = (2\mu r_{opt}/(r_{opt}/\sqrt{d}) + 1)^d$ سلول است، که هر سلول را می‌توان با دایره‌ای به شعاع $r_{opt}/2$ پوشش داد، شکل ۱.۳ را ببینید. بنابراین با شرط $c \geq 2c'$ ، رابطه‌ی

$$|P \cap b(p, \mu r)| < c'm \leq n/2$$

برقرار می‌باشد. در نتیجه الگوریتم با احتمال $1/c$ در هر تکرار به جواب می‌رسد و تعداد مورد انتظار تکرارها $\mathcal{O}(c)$ است، و چون در هر تکرار زمان $\mathcal{O}(n)$ مصرف می‌شود، الگوریتم در زمان مورد انتظار خطی $\mathcal{O}(n)$ به جواب می‌رسد. \square

لم ۳.۱.۳ یکی از تکنیک‌های مهم برای ایجاد حلقه‌های تفکیک‌کننده‌ی نقاط، در روش ساخت تجزیه نقاط به زوج‌های نیم مجزا در این فصل است.

لم ۳.۱.۳ فرض کنید P مجموعه‌ای از n نقطه در \mathbb{R}^d ، $t > 0$ یک پارامتر، و c یک ثابت به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد. می‌توان در زمان مورد انتظار خطی دایره‌ی $b = b(p, r)$ را یافت به طوری که:

$$|b \cap P| \geq n/c \text{ (الف)}$$

$$|ring(p, r, r(1 + 1/t)) \cap P| \leq n/2t \text{ (ب)}$$

$$|P \setminus b(p, 2r)| \geq n/2 \text{ (ج)}$$

اثبات. فرض کنید $b = b(p, \alpha)$ دایره‌ی محاسبه شده در زمان مورد انتظار خطی، با استفاده از لم

$$2.1.3، \text{ با ثابت } \mu = 8 \text{ باشد. بنابراین داریم: } |b(p, \alpha) \cap P| \geq n/c \text{ و } |b(p, 8\alpha) \cap P| \leq n/2.$$

به ازای $t = 0, 1, \dots, t$ قرار دهید: $r_i = \alpha(1 + 1/t)^i$ و حلقه‌های $R_i = ring(p, r_{i-1}, r_i)$ را

در نظر بگیرید. ادعا می‌شود که همه‌ی این حلقه‌های مجزا، داخل دایره‌ی $b(p, 4\alpha)$ قرار می‌گیرند.

^۶Grid

از آنجا که به ازای همهی $x \geq 0$ ، داریم $1 + x \leq e^x$ ، بنابراین $r_t = \alpha(1 + 1/t)^t \leq \alpha(e^{1/t})^t \leq \alpha e$ ، و چون $e < 4\alpha$ پس $\alpha e < 4\alpha$ و بنابراین ادعا ثابت می‌شود.

از آنجا که $b(p, \lambda\alpha)$ شامل حداکثر نیمی از نقاط P است (طبق لم ۲.۱.۳)، پس یکی از این t حلقه (مثلاً حلقه‌ی i ام، $R_i = \text{ring}(p, r_{i-1}, r_i)$) شامل حداکثر $n/2t$ نقطه از P است. حال قرار دهید $x = r_{i-1} \leq 4\alpha$ از آنجا که $b(p, 2r) \subseteq b(p, \lambda\alpha)$ ، بنابراین حداقل $n/2$ نقاط P در $P \setminus b(p, 2r)$ است و موارد (الف) تا (ج) برای $b(p, r)$ برقرار است. \square

۲.۳ تجزیه‌ی نقاط با پراکندگی محدود به زوج‌های کاملاً مجزا

در این بخش الگوریتمی برای تجزیه‌ی نقاط به زوج‌های کاملاً مجزا^۷، که وزن آن به پراکندگی نقاط وابسته است، شرح داده می‌شود.

۱.۲.۳ روش ساخت

فرض کنید P مجموعه‌ی n نقطه در \mathbb{R}^d با پراکندگی $\phi = \phi(P)$ و $s > 0$ یک پارامتر باشد. یادآوری می‌شود پراکندگی نقاط برابر با نسبت بیش‌ترین فاصله به کم‌ترین فاصله بین دو نقطه در مجموعه نقاط است. الگوریتم در ابتدا درخت چهارتایی مجموعه‌ی P را می‌سازد (توضیحات مربوط به درخت چهارتایی در فصل ۱ آمده است)، ارتفاع این درخت $h = \mathcal{O}(\log \phi)$ است و در زمان $\mathcal{O}(n \log \phi)$ ، قابل ساخت می‌باشد. حال اگر برگ‌ی شامل یک نقطه از P و دارای ارتفاعی کمتر از h بود، تجزیه ادامه می‌یابد تا ارتفاع درخت به h برسد. در نهایت همهی برگ‌های درخت در سطح h قرار می‌گیرند.

برای تجزیه‌ی نقاط به زوج‌های کاملاً مجزا با پارامتر s ، از درخت چهارتایی ساخته شده، استفاده می‌شود؛ به این صورت که هر گره در این درخت با گره‌ی هم سطح با خود، می‌تواند تشکیل زوج دهد؛ در واقع اگر مجموعه نقاط ذخیره شده در زیردرخت ریشه‌دار در گره‌ی u با $P(u)$ نشان داده شود، زوج $(P(u), P(v))$ یک زوج از $WSPD$ است، اگر u و v گره‌هایی هم سطح در درخت چهارتایی، و $P(u)$

^۷WSPD

و $P(v)$ ، دو مجموعه‌ی کاملاً مجزا باشند؛ یا به عبارتی فاصله‌ی بین دو سلول \square_u و \square_v متناظر با گره‌های u و v ، از s برابر قطر $\square_u = \square_v$ ، بزرگ‌تر باشد. در غیر این صورت (یعنی اگر u و v هم سطح ولی $P(u)$ و $P(v)$ کاملاً مجزا نباشند)، الگوریتم به صورت بازگشتی شرط کاملاً مجزا بودن همه‌ی فرزندان u را از همه‌ی فرزندان v ، بررسی می‌کند و به این ترتیب زوج‌های $WSPD$ گزارش می‌شوند. این الگوریتم، برای یافتن زوج‌های کاملاً مجزا، مشابه الگوریتم ۴.۱.۲ که در فصل دو مطرح شد، عمل می‌کند، با این تفاوت که ورودی الگوریتم قبلی، درخت نسبیت کراندار بود و شرط نیم مجزا بودن برای زوج‌ها بررسی می‌شد، در حالی که در این‌جا ورودی درخت چهارتایی است و شرط کاملاً مجزا بودن برای زوج‌ها بررسی می‌شود.

مشاهده ۱.۲.۳ هر گره از درخت چهارتایی در $\mathcal{O}(s^d)$ زوج از $WSPD$ گزارش شده، ظاهر می‌شود.

اثبات. زوج $(P(u), P(v))$ ، ظاهر شده در $WSPD$ را در نظر بگیرید؛ بنابراین گره‌های هم سطح u و v در درخت، متناظر با دو سلول \square_u و \square_v ، که مکعب‌هایی با اندازه‌ی یکسان در درخت چهارتایی هستند، وجود دارند که در شرط

$$d(\square_u, \square_v) \geq s \cdot \text{diam}(\square_u)$$

صدق می‌کنند. ادعا می‌شود: $d(\square_u, \square_v) \in \mathcal{O}(s \cdot \text{diam}(\square_u))$. به عبارتی گره‌ی u تنها با گره‌هایی مانند v تشکیل زوج می‌دهد که فاصله‌ی سلول‌های متناظر با دو گره، حداقل $s \cdot \text{diam}(\square_u)$ و حداکثر از مرتبه‌ی $\mathcal{O}(s \cdot \text{diam}(\square_u))$ باشد.

اثبات ادعا: گزارش زوج $(P(u), P(v))$ در $WSPD$ ، به معنای این است که پدران گره‌های u و v ، تشکیل زوج‌های کاملاً مجزا نمی‌دهند. به عبارتی رابطه‌ی:

$$d(\square_{p(u)}, \square_{p(v)}) < s \cdot \text{diam}(\square_{p(u)})$$

برقرار است. از طرفی، با توجه به ساختار سلول‌ها (مربع‌های d بعدی) در درخت چهارتایی داریم:

$$d(\square_u, \square_v) - 2 \text{diam}(\square_{p(u)}) \leq d(\square_{p(u)}, \square_{p(v)}).$$

بنابراین با ترکیب دو رابطه‌ی بالا، داریم:

$$d(\square_u, \square_v) \leq s \cdot \text{diam}(\square_{p(u)}) + 2 \text{diam}(\square_{p(u)}). \quad (1-3)$$

در درخت چهارتایی، قطر سلول متناظر با هر گرهی پدر، دو برابر قطر سلول متناظر با گرهی فرزند است. بنابراین با جایگذاری قطر سلول فرزند، به جای قطر سلول پدر، در رابطه‌ی ۱-۳ داریم:

$$d(\square_u, \square_v) \leq 2 \text{diam}(\square_u)(s + 2) \in \mathcal{O}(s \cdot \text{diam}(\square_u)).$$

به این ترتیب ادعا ثابت می‌شود.

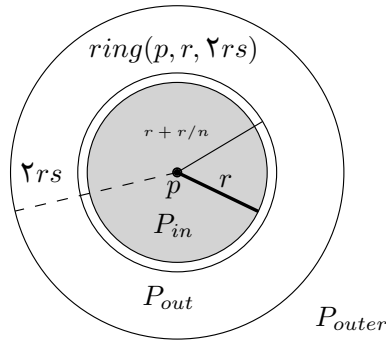
با توجه به ادعای ثابت شده و این که گره‌های u و v تشکیل زوج می‌دهند، داریم:
 $s \cdot \text{diam}(\square_u) \leq d(\square_u, \square_v) \in \mathcal{O}(s \cdot \text{diam}(\square_u))$ در واقع گره‌هایی از درخت چهارتایی می‌توانند با گره u تشکیل یک زوج دهند که اولاً سلول متناظر با این گره‌ها، با سلول \square_u دارای اندازه‌ی یکسان باشند (گره‌های هم سطح با u) و ثانیاً این سلول‌ها در حلقه‌ای به شعاع $\Theta(s \cdot \text{diam}(\square_u))$ در اطراف \square_u قرار گیرند. طبق استدلال بسته بندی (فصل ۱، لم ۱.۵.۱)، تعداد این گره‌ها (متناظر با سلول‌ها) $\mathcal{O}(s^d)$ می‌باشد. در نتیجه گرهی u در حداکثر $\mathcal{O}(s^d)$ زوج از $WSPD$ گزارش شده ظاهر می‌شود. \square

لم ۲.۲.۳ فرض کنید P مجموعه‌ی n نقطه در \mathbb{R}^d با پراکندگی $\phi = \phi(P)$ و $s > 0$ ، یک پارامتر باشد. می‌توان یک $WSPD$ با پارامتر s ، برای P با وزن $\mathcal{O}(ns^d \log \phi)$ ساخت به طوری که هر نقطه از P در حداکثر $\mathcal{O}(s^d \log \phi)$ زوج ظاهر شود.

اثبات. هر نقطه‌ی $p \in P$ در زوج‌هایی ظاهر می‌شود که شامل گرهی u از درخت چهارتایی است و u گره‌ای در مسیر ریشه تا برگ شامل p است، یعنی در زوج $(P(u), P(v))$ که $p \in P(u)$ از آنجا که تعداد این گره‌ها در مسیر ریشه تا برگ $\mathcal{O}(\log \phi)$ است و طبق مشاهده‌ی ۱.۲.۳، هر یک از این گره‌ها در $\mathcal{O}(s^d)$ زوج ظاهر می‌شوند، بنابراین هر نقطه‌ی $p \in P$ در حداکثر $\mathcal{O}(s^d \log \phi)$ زوج ظاهر شده و به ازای n نقطه وزن $WSPD$ حداکثر $\mathcal{O}(ns^d \log \phi)$ خواهد بود. \square

با توجه به این که هر تجزیه زوج کاملاً مجزایی، یک تجزیه زوج نیم مجزا^۱ نیز می‌باشد، بنابراین $WSPD$ ساخته شده در بخش ۱.۲.۳، یک $SSPD$ برای مجموعه نقاط می‌باشد. برای داشتن یک $SSPD$ با وزن

^۱SSPD



شکل ۲.۳: مربوط به روش ساخت SSPD مطرح شده در بخش ۲.۳.

کم، این شرط اضافه می‌شود که پراکندگی نقاط از مرتبه‌ی چندجمله‌ای^۹ روی تعداد نقاط باشد؛ به عبارتی $\phi = n^{O(1)}$ برقرار باشد؛ در ادامه فرض می‌شود مجموعه نقاط داده شده به عنوان ورودی مسأله، دارای پراکندگی چندجمله‌ای روی تعداد نقاط هستند.

۳.۳ یک روش ساده برای ساخت تجزیه نقاط به زوج‌های نیم-مجزا

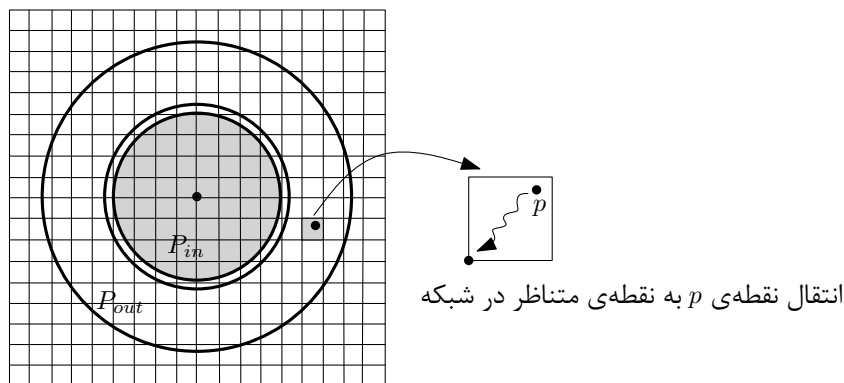
مجزا

در این بخش روشی ساده برای ساخت SSPD ها مطرح می‌شود. این روش نسبت به روش‌های مطرح شده در فصل دو نسبتاً ساده‌تر است و ضمانت می‌کند هر نقطه در حداکثر $O(s^d \log^2 n)$ زوج ظاهر می‌شود.

۱.۳.۳ روش ساخت

با استفاده از لم ۳.۱.۳ و قرار دادن $t = n$ دایره‌ی $b(p, r)$ شامل حداقل n/c ، و حلقه‌ی $ring(p, r, r(1 + 1/t))$ شامل حداکثر $\lceil n/2t \rceil = \lceil 1/2 \rceil = 0$ (شامل هیچ یک از نقاط P نباشد) محاسبه می‌شود، همچنین دایره‌ی $b(p, 2rs)$ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین مجموعه نقاط P به سه دسته تقسیم می‌شوند: $P_{in} = P \cap b(p, r)$ ، $P_{out} = P \cap ring(p, r, 2rs)$ و $P_{outer} = P \setminus (P_{in} \cup P_{out})$. شکل ۲.۳ را ببینید. با توجه به تعریف اول زوج‌های نیم‌مجزا، که در بخش

^۹Polynomial



شکل ۳.۳: چیدمان مجموعه نقاط P_{in} و P_{out} در شبکه.

۱.۶.۱، از فصل یک آمده است، واضح است که دو مجموعه P_{in} و P_{outer} یک زوج نیم مجزا می سازند که این زوج به $SSPD$ اضافه می شود.

به منظور محاسبه $SSPD$ ، برای همه ی زوج نقاط در مجموعه $X = P_{in} \otimes P_{out}$ ، الگوریتم به این صورت عمل می کند: فرض کنید فاصله ی بین مجموعه نقاط P_{in} و P_{out} برابر با ℓ باشد، چون بین نقاط P_{in} و P_{out} یک حلقه ی خالی از نقطه با شعاع خارجی $r + r/n$ وجود دارد (شکل ۲.۳ را ببینید)، در نتیجه $\ell \geq r/n$ است و مجموعه $Q = P_{in} \cup P_{out}$ دارای قطر $\text{diam}(Q) \leq 4\ell ns$ است. در گام بعدی، مجموعه نقاط Q در شبکه ای $1'$ با طول ضلع $z = (\ell/2s)\sqrt{d}$ چیده می شوند، به این صورت که به ازای نقطه ی $p \in Q$ به مختصات (x_p, y_p) ، این نقطه به $(\lfloor x_p/z \rfloor z, \lfloor y_p/z \rfloor z)$ ، که نقطه ای از شبکه ی ساخته شده است، انتقال می یابد، شکل ۳.۳ را ببینید. مجموعه نقاط جدید حاصل از چیدمان نقاط بر روی گره های شبکه را Q' بنامید. واضح است که Q' دارای پراکندگی حداکثر $\frac{4\ell ns}{\ell/2s} \in \mathcal{O}(n \cdot s^2)$ است. از آنجا که پراکندگی نقاط Q' از مرتبه ی چندجمله ای روی n است، می توان با استفاده از روش مطرح شده در بخش ۲.۳، یک $SSPD$ با پارامتر $2s$ ، برای مجموعه نقاط Q' ساخت، سپس این $SSPD$ روی مجموعه نقاط اولیه Q تفسیر می شود؛ به این صورت که به ازای هر نقطه ی $q \in Q'$ و همه ی زوج هایی که شامل q هستند، تمام نقاط $p \in Q$ که به گره ی q در شبکه، منتقل شده اند، جایگزین q می شوند و سپس با استفاده از لم ۱.۱.۳ تنها زوج های در بر گیرنده ی مجموعه $X = P_{in} \otimes P_{out}$ گزارش می شوند و بنابراین یک $SSPD$ با پارامتر $\mathcal{O}(s)$ ، برای این زوج ها به دست می آید. در نهایت، برای تکمیل روند

^{۱'} Grid

ساخت، الگوریتم روی مجموعه‌های P_{in} و $P_{out} \cup P_{outer}$ بازگشت می‌کند و برای زوج‌های $P_{in} \otimes P_{in}$ و $(P_{out} \cup P_{outer}) \otimes (P_{out} \cup P_{outer})$ با پارامتر $\mathcal{O}(s)$ می‌سازد.

لم ۱.۳.۳ $SSPD$ ساخته شده در بخش ۳.۳ دارای وزن $\mathcal{O}(ns^d \log n)$ است و هر نقطه در $\mathcal{O}(s^d \log^2 n)$ زوج از آن ظاهر می‌شود.

اثبات. ابتدا روی تعداد زوج‌هایی که یک نقطه می‌تواند در آن ظاهر شود، بحث می‌شود:

در این الگوریتم ابتدا زوج (P_{in}, P_{outer}) به $SSPD$ اضافه می‌شود. بنابراین به ازای یک نقطه مانند $p \in P_{in}$ یا $p \in P_{outer}$ این نقطه در زوج (P_{in}, P_{outer}) یک‌بار ظاهر می‌شود. همچنین طبق روش ساخت، برای مجموعه نقاط $Q = P_{in} \cup P_{out}$ ، زوج‌های نیم مجزا با استفاده از روش مطرح شده در بخش ۲.۳، که روی نقاط Q' (گره‌های شبکه، متناظر با نقاط Q) اعمال می‌شوند، به دست می‌آیند؛ همانطور که در لم ۲.۲.۳ آمده، هر نقطه عضو Q' در $\mathcal{O}(s^d \log \phi)$ زوج ظاهر می‌شود و چون $\phi(Q') = n \cdot s^2$ پس هر نقطه عضو Q' (و متناظر با آن عضو Q)، در $\mathcal{O}(s^d \log(n \cdot s^2)) = \mathcal{O}(s^d \log n)$ تعداد زوج در بر گیرنده‌ی زوج‌های $P_{in} \otimes P_{out}$ ظاهر می‌شود.

اگر $n_1 = |P_{in}|$ و $n_2 = |P_{out} \cup P_{outer}|$ در نظر گرفته شود، در نتیجه $n_1 + n_2 = n$ و $n_1, n_2 \geq n/c$ است و هر نقطه در حداکثر $T(n) = 1 + \mathcal{O}(s^d \log n) + \max(T(n_1), T(n_2))$ زوج ظاهر می‌شود، از آنجا که تعداد بازگشت‌ها روی P_{in} و $P_{out} \cup P_{outer}$ حداکثر $\mathcal{O}(\log n)$ است، در نتیجه $T(n) = \mathcal{O}(s^d \log^2 n)$ ، و تعداد زوج‌هایی که یک نقطه در آن‌ها ظاهر می‌شود، با $\mathcal{O}(s^d \log^2 n)$ کراندار می‌شود.

برای اثبات وزن $SSPD$ ، می‌توان گفت از آنجا که هر نقطه در حداکثر $\mathcal{O}(s^d \log^2 n)$ زوج ظاهر می‌شود، پس به ازای n نقطه داریم $\mathcal{O}(ns^d \log^2 n)$ ، که برابر حداکثر وزن $SSPD$ ساخته شده است.

□

۴.۳ یک روش بهینه برای ساخت تجزیه نقاط به زوج‌های نیم

مجزا

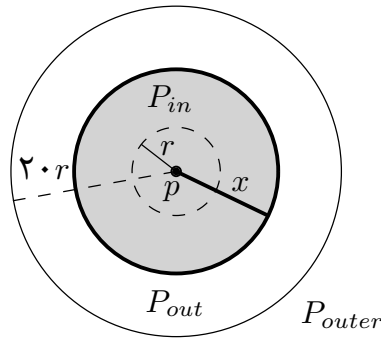
در این بخش روشی برای ساخت $SSPD$ ها ارائه می‌شود که دارای طرح افراز نقاط به صورت تصادفی است. این روش، اولین روش ساختی است که ضمانت می‌کند هیچ نقطه‌ای در تعداد زیادی زوج ظاهر نمی‌شود؛ در واقع با این روش ساخت، هر نقطه، با احتمال بالا، در $\mathcal{O}(s^d \log n)$ تعداد زوج ظاهر می‌شود.

۱.۴.۳ روش ساخت

فرض کنید P مجموعه‌ی n نقطه در \mathbb{R}^d باشد. به منظور به دست آوردن یک $SSPD$ با پارامتر $s > 0$ ، روی نقاط P ، ابتدا بررسی می‌شود اگر $n = \mathcal{O}(s^d)$ بود، آنگاه یک $WSPD$ با پارامتر s برای نقاط ساخته می‌شود، بخش ۱.۲.۳ را ببینید، در غیر این صورت، ابتدا با استفاده از لم ۲.۱.۳ و با قرار دادن $\mu = 2^0$ ، دایره‌ی $b(p, r)$ شامل حداقل n/c (ثابت و به حد کافی بزرگ) و دایره‌ی $b(p, 2^0 r)$ شامل حداقل $n/2$ نقطه از P محاسبه می‌شود؛ سپس به طور تصادفی عدد x در بازه‌ی $[5r, 6r]$ انتخاب شده و مجموعه نقاط P به سه دسته تقسیم می‌شود: $P_{in} = P \cap b(p, x)$ ، $P_{out} = P \cap ring(p, x, 2^0 r)$ و $P_{outer} = P \setminus (P_{in} \cup P_{out})$ را ببینید. شکل ۴.۳ انتخاب عدد 2^0 برای μ ، علاوه بر این که تضمینی برای بزرگ بودن مقدار c است (زیرا c به μ و بُعد d وابسته است)، همچنین فاصله‌ی لازم بین نقاط P_{in} و P_{outer} را ایجاد می‌کند.

به منظور به دست آوردن زوج‌های $SSPD$ ، در ابتدا همه‌ی زوج نقاط در $P_{in} \otimes (P_{out} \cup P_{outer})$ مجزا می‌شوند. این کار در دو مرحله انجام می‌گیرد: اول محاسبه‌ی $SSPD$ برای زوج نقاط در $P_{in} \otimes P_{outer}$ و سپس برای $P_{in} \otimes P_{out}$. الگوریتم در این روش به صورت بازگشتی عمل می‌کند و برای مجموعه نقاط P_{in} و $P_{out} \cup P_{outer}$ نیز $SSPD$ محاسبه می‌کند. در نهایت همه‌ی این زوج‌ها با هم ترکیب شده و یک $SSPD$ مناسب را برای P می‌سازند.

جداسازی مجموعه نقاط P_{in} از نقاط P_{outer} : مجموعه نقاط P_{in} به $\mathcal{O}(s^d)$ خوشه $C_1'', C_2'', \dots, C_m''$ با قطر حداکثر $r/2^0 s$ ، تقسیم بندی می‌شود (نحوه‌ی خوشه‌بندی در زیر بخش ۲.۴.۳ توضیح داده شده است)، از آنجا که فاصله‌ی نقاط P_{in} و P_{outer} از r بیش‌تر است، پس هر یک از خوشه‌های C_i'' به ازای



شکل ۴.۳: مربوط به روش ساخت SSPD مطرح شده در بخش ۴.۳.

با مجموعه نقاط P_{outer} تشکیل یک زوج نیم مجزا با پارامتر s می‌دهند (چون فاصله بین C_i'' و P_{outer} بیش‌تر از r است و این فاصله از $r/20 = s.(r/20s)$ بزرگ‌تر است). بنابراین زوج‌های (C_i'', P_{outer}) به ازای همه $i = 1, 2, \dots, m$ به زوج‌های ساخته شده در این مرحله **زوج‌های طویل**^{۱۱} گفته می‌شود. واضح است که هر نقطه در مجموعه نقاط P حداکثر در $\mathcal{O}(s^d)$ زوج طویل ظاهر می‌شود.

جداسازی مجموعه نقاط P_{in} از نقاط P_{out} : این مرحله از جداسازی نقاط، نسبت به مرحله قبلی، کمی دشوارتر است، زیرا هیچ فضای خالی بین دو مجموعه نقطه وجود ندارد. ابتدا یک درخت چهارتایی روی مجموعه نقاط $P_{in} \cup P_{out} = P \cap b(p, 20r)$ ساخته می‌شود، سپس با توجه به زیربخش ۱.۲.۳، یک $WSPD$ با پارامتر $1/\rho$ ، روی این مجموعه از نقاط، ساخته می‌شود به طوری که $\rho = 1/(4s)$ است. اما تنها زوج‌هایی مانند (u, v) می‌توانند در خروجی ظاهر شوند که $P(u) \otimes P(v)$ شامل حداقل یک زوج در $P_{in} \otimes P_{out}$ باشند. به منظور داشتن چنین خروجی‌های مطلوب و حذف خروجی‌های نامطلوب (خروجی‌هایی که $P(u) \otimes P(v)$ دارای زوجی در $P_{in} \otimes P_{out}$ نیست)، در ساخت درخت چهارتایی و گزارش زوج‌های کاملاً مجزا، کمی متفاوت نسبت به روش مطرح شده در زیربخش ۱.۲.۳ عمل می‌شود؛ به این صورت که در این روش، ساخت درخت چهارتایی و گزارش زوج‌های کاملاً مجزا، همزمان با هم انجام می‌شود، در حالی که در روش مطرح شده در ۱.۲.۳، ابتدا درخت چهارتایی به صورت کامل، ساخته می‌شود، سپس با استفاده از آن، زوج‌های کاملاً مجزا گزارش می‌شوند. در این قسمت برای ساخت درخت چهارتایی،

^{۱۱}Long Pairs

الگوریتم ابتدا با گره ریشه که شامل همه‌ی نقاط $R = P_{in} \cup P_{out}$ است، شروع می‌کند، سپس برای محاسبه‌ی زوج‌های کاملاً مجزا هر کجا به فرزندان گره‌ای مانند v (گره‌ی موجود در درخت که فرزندان آن در درخت نیستند) احتیاج بود (منظور وقتی است که گره‌ی v با گره‌های هم سطح خود، تشکیل زوج کاملاً مجزا ندهد)، فرزندان v را محاسبه و $P(v)$ را تقسیم کرده و به هر یک از فرزندان تخصیص می‌دهد. برای فرزندی مانند w از v ، الگوریتم بررسی می‌کند که اگر $P(w) \subseteq P_{in}$ یا $P(w) \subseteq P_{out}$ ، یعنی اگر مجموعه نقاط ذخیره شده در زیردرخت ریشه‌دار در w کاملاً در P_{in} یا P_{out} بود، آنگاه پرچم^{۱۲} مربوطه برای w فعال می‌شود، مثلاً برای حالتی که $P(w) \subseteq P_{in}$ عدد ۱ و برای حالت $P(w) \subseteq P_{out}$ عدد ۲ به w تخصیص می‌یابد. این درخت، درخت چهارتایی جزئی^{۱۳} نامیده می‌شود.

به منظور ساخت یک تجزیه زوج کاملاً مجزا، با استفاده از درخت چهارتایی جزئی، الگوریتم به این صورت عمل می‌کند: برای بررسی زوج گره‌های u و v از درخت چهارتایی جزئی، در ابتدای کار پرچم‌های هر گره دیده می‌شود و اگر u و v هر دو دارای پرچم ۱، یا پرچم ۲ بودند به این معنی است که هر دو زیرمجموعه‌ی P_{in} یا زیر مجموعه‌ی P_{out} هستند، بنابراین الگوریتم هیچ زوجی را در این مرحله تولید نمی‌کند، چون عملاً زوج‌های تولید شده از u و v ، نقاط P_{in} را از نقاط P_{out} جدا نمی‌کند و خروجی مطلوب ایجاد نمی‌کند. در غیر این صورت، یعنی اگر هر دو گره دارای پرچم‌های متفاوتی بودند، شرط کاملاً مجزا بودن برای مجموعه نقاط در زیرمجموعه‌ی کانونی آن‌ها بررسی می‌شود. بررسی پرچم‌ها، در زمان ثابت قابل اجرا است. به زوج‌های تولید شده در این مرحله زوج‌های کوتاه^{۱۴} گفته می‌شود. در نهایت برای اینکه زوج‌های کوتاه فقط زوج نقاط $P_{in} \otimes P_{out}$ را پوشش دهد از لم ۱.۱.۳، با قرار دادن $P = P_{in} \cup P_{out}$ ، $Q = P_{in}$ و $\bar{Q} = P_{out}$ ، استفاده می‌شود.

۲.۴.۳ خوشه‌بندی مجموعه نقاط

به منظور خوشه‌بندی مجموعه نقاط $\{p_1, p_2, \dots, p_{|P_{in}|}\} \in P_{in}$ ، به صورت زیر عمل می‌شود: (C_i''') خوشه‌ی i ام و C مجموعه‌ی مراکز خوشه‌ها است).

^{۱۲}Flag

^{۱۳}Partial Quadtree

^{۱۴}Short Pairs

(۱) مقداردهی اولیه: قرار دادن $C_1'' = \{p_1\}$ ، $c_1'' = center(C_1'') = p_1$ ، $m = 1$ و اضافه کردن

p_1 به \mathcal{C}

(۲) به ازای $i = 2, 3, \dots, |P_{in}|$ تکرار شود:

اولین نقطه در \mathcal{C} که فاصله آن از p_i کمتر یا مساوی $r/2$ است را p_j نامیده و نقطه‌ی p_i به خوشه‌ی

C_j'' اضافه می‌شود. اگر به ازای $j = 1, 2, \dots, m$ چنین نقطه‌ای پیدا نشد، آنگاه p_i خود یک خوشه‌ی جدید

با مرکز p_i می‌سازد، یعنی: $m = m + 1$ ، $C_m'' = \{p_i\}$ ، $c_m'' = center(C_m'') = p_i$ و $\mathcal{C} = \mathcal{C} \cup \{p_i\}$

۳.۴.۳ آنالیز وزن و زمان ساخت SSPD محاسبه شده

در ابتدا وزن SSPD جدا کننده‌ی مجموعه نقاط P_{in} از نقاط P_{out} ، محاسبه می‌شود. به این منظور

متغیر تصادفی D_q تعریف می‌شود فاصله‌ی علامت‌دار (مثبت یا منفی) نقطه‌ی $q \in b(p, 2 \cdot r)$ از دایره‌ی

$b(p, x)$ شکل ۴.۳ را ببینید. در واقع فرمول محاسبه‌ی D_q به صورت $D_q = \|p - q\| - x$ است.

مشاهده ۱.۴.۳ به ازای هر نقطه‌ی $q \in b(p, 2 \cdot r)$ ، متغیر تصادفی D_q در بازه‌ای به طول x به طور

یکنواخت توزیع شده است.

اثبات. برای اثبات این ادعا، قبلاً در زیر بخش ۱.۴.۳ گفته شد که متغیر x یک متغیر تصادفی است

که به طور یکنواخت در بازه‌ای به طول r توزیع شده است، به عبارتی $X \sim U(\delta r, \epsilon r)$. بنابراین تابع توزیع

آن به صورت $F_X(x) = (x - \delta r)/r$ است. از آنجا که تابع توزیع به صورت $F_X(x) = P(X \leq x)$

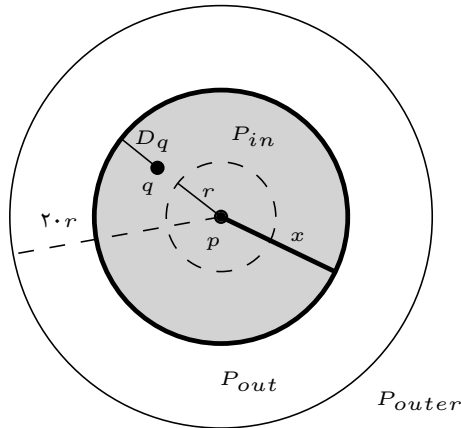
تعریف می‌شود، برای متغیر تصادفی $-x$ ، $D_q = \|p - q\| - x$ ، قرار می‌دهیم: $D_q = Y$ و $\|p - q\| = t$.

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(t - x \leq y) = P(t - y \leq x) = 1 - F_x(t - y) \\ &= 1 - \frac{t - y - \delta r}{r} \\ &= \frac{y - (t - \epsilon r)}{r} \end{aligned}$$

با قرار دادن $t^* = t - \epsilon r$ داریم:

$$F_Y(y) = \frac{y - t^*}{r}$$



شکل ۵.۳: مربوط به اثبات لم ۲.۴.۳.

و با قراردادن $a^* = t^*$ و $r = b^* - a^*$ داریم:

$$b^* = r + t^* = r + t - \epsilon r = t - \delta r$$

پس:

$$a^* = t - \epsilon r \quad , \quad b^* = t - \delta r$$

در نتیجه متغیر تصادفی $Y = D_q$ دارای تابع توزیع $F_Y(y) = \frac{y - a^*}{b^* - a^*}$ است و روی بازه‌ای به طول r به طور یکنواخت توزیع شده است، به عبارتی: $Y = D_q \sim U(a^*, b^*)$ و ادعا ثابت می‌شود. \square

برای به دست آوردن وزن $SSPD$ جداکننده‌ی P_{in} و P_{out} ، باید تعداد زوج‌هایی که یک نقطه مانند $q \in R = P_{in} \cup P_{out}$ می‌تواند در آن‌ها ظاهر شود، را به دست آورد. به این منظور ابتدا زوج‌های $(P(u), P(v))$ ، که در $SSPD$ ساخته شده وجود دارند به طوری که $q \in P(u)$ ، در نظر گرفته می‌شوند و سطوحی از درخت چهارتایی که u و v می‌توانند در آن سطوح باشند، مشخص می‌شود. لم ۲.۴.۳ این هدف را دنبال می‌کند.

لم ۲.۴.۳ مجموعه نقاط R به صورت $R = P_{in} \cup P_{out}$ ، و نقطه‌ای مانند $q \in R$ را در نظر بگیرید؛ همچنین یک زوج از گره‌های درخت چهارتایی مانند (u, v) ، به گونه‌ای که $(P(u), P(v))$ زوجی در

$SSPD$ ساخته شده برای $P_{in} \otimes P_{out}$ است، و با این فرض که $q \in P(u)$ می‌باشد راه، در نظر بگیرید؛ ثابت می‌شود سطوحی از درخت که گره‌های u یا v می‌توانند در آن سطح‌ها باشند، بازه‌ای به صورت:

$$depth(u) = depth(v) \in \left[\log s, \log s + \beta + \log \frac{r}{|D_q|} \right] \quad (۲-۳)$$

است، که β عددی ثابت است.

گفته می‌شود سطوح داخل این بازه، سطوح فعال^{۱۵} برای q هستند و تعداد کل سطوح فعال برای q

$$\nu(q) = 1 + \beta + \log \frac{r}{|D_q|}$$

اثبات. فرض کنید $q \in P_{in}$ (استدلال مشابهی برای وقتی $q \in P_{out}$ ، برقرار است). مشاهده

می‌شود که q دارای حداقل فاصله‌ی $|D_q|$ از همه‌ی نقاط داخل P_{out} است، شکل ۵.۳ را ببینید.

یک زوج دلخواه از گره‌های درخت چهارتایی مانند u و v انتخاب کنید که دارای ویژگی‌های زیر است:

الف) u و v در یک سطح از درخت چهارتایی هستند.

ب) $q \in P(u)$.

ج) سلول‌های متناظر با u و v ، دارای قطر $\Delta = \text{diam}(\square_u) = \text{diam}(\square_v)$ هستند به طوری که

$$\Delta \leq |D_q| / (s.c) \quad \text{که } c \text{ به اندازه‌ی کافی کوچک است.}$$

د) $P(v) \cap P_{out} \neq \emptyset$.

حال می‌توان گفت \square_u و \square_v ، دارای اضلاع با طول یکسان هستند و فاصله‌ی بین آن‌ها حداقل برابر

است با:

$$\begin{aligned} d(\square_u, \square_v) &\geq d(q, \mathbb{R}^d \setminus b(p, x)) - 2\Delta \\ &\geq |D_q| - \frac{2|D_q|}{s.c} = \left(1 - \frac{2}{s.c}\right) \cdot s.c \cdot \frac{1}{s.c} |D_q| \\ &\geq (s.c - 2)\Delta. \end{aligned} \quad (۳-۳)$$

نامساوی اول با توجه به شرط (ب) و (د) برقرار است. نامساوی دوم نیز با توجه به شرط (ج) و این که فاصله‌ی

$q \in P_{in}$ ، از P_{out} حداقل برابر با $|D_q|$ است، برقرار می‌باشد.

^{۱۵}Active levels

با توجه به رابطه‌ی ۳-۳، گره‌های u و v ، کاملاً مجزا نسبت به پارامتر $\alpha = (sc - 2)$ هستند. ادعا می‌شود که اگر ثابت c به حد کافی بزرگ باشد ($c \geq 16 + 2/s$)، آنگاه پدران u و v یعنی $p(u)$ و $p(v)$ کاملاً مجزا نسبت به پارامتر $\alpha/4$ هستند. برای اثبات ادعا داریم:

$$\begin{aligned} d(\square_{p(u)}, \square_{p(v)}) &\geq d(\square_u - \square_v) - 2 \operatorname{diam}(\square_{p(u)}) = d(\square_u - \square_v) - 4\Delta \\ &\geq d(q, \mathbb{R}^d \setminus b(p, x)) - 2\Delta - 4\Delta \geq |D_q| - \frac{6|D_q|}{s.c} \\ &= \left(1 - \frac{6}{s.c}\right) \cdot s.c \cdot \frac{1}{s.c} |D_q| \geq (sc - 6)\Delta \\ &= \frac{(s.c) - 6}{2} \operatorname{diam}(\square_{p(u)}) \end{aligned}$$

یعنی $P(u)$ و $p(v)$ کاملاً مجزا نسبت به پارامتر $\beta = \frac{(s.c) - 6}{2}$ هستند. واضح است که با قرار دادن ثابت $c \geq 16 + 2/s$ و به ازای $s > 1/2$ ، داریم $\beta \geq \alpha/4$ و ادعا ثابت می‌شود. از آنجا که $1/\rho \geq \alpha/4$ (به ازای $\rho = 1/(4s)$) است، پس باید زوج $(P(p(u)), P(p(v)))$ در $SSPD$ گزارش شود و این یعنی هیچ‌گاه زوج $(P(u), P(v))$ تولید نمی‌شود که با فرض لم در تناقض است.

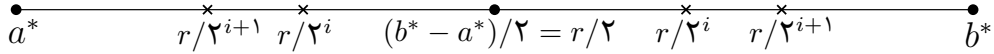
بنابراین با توجه ادعای مطرح شده در بالا، و برای داشتن $(P(u), P(v))$ در $SSPD$ تولید شده، نتیجه می‌شود که شرط $\Delta \leq |D_q|/(s.c)$ نمی‌تواند برقرار باشد و بنابراین حداقل اندازه‌ی قطر برابر با $\Delta \geq |D_q|/(s.c)$ است. با توجه به اینکه عمق یک گره دلخواه مانند w با قطر $\operatorname{diam}(\square_w)$ در درخت چهارتایی، برابر با $\log \frac{\operatorname{diam}(P_{in} \cup P_{out})\sqrt{d}}{\operatorname{diam}(\square_w)}$ است، پس می‌توان گفت حداکثر عمق گره u برابر است با:

$$\mathcal{O}(1) + \log \frac{\operatorname{diam}(P_{in} \cup P_{out})}{|D_q|/s.c} = \mathcal{O}(1) + \log \frac{4 \circ r}{|D_q|/s.c} = \mathcal{O}(1) + \log s + \log \frac{r}{|D_q|}$$

به این ترتیب کران بالا برای عمق گره‌ی u به دست آمد. برای اثبات کران پایین بازه یا همان حداقل عمق گره u ، می‌توان گفت فاصله‌ی بین سلول‌های \square_u و \square_v حداکثر $\operatorname{diam}(R)$ است ($R = P_{in} \cup P_{out}$). با توجه به اینکه $(P(u), P(v))$ یک زوج در $SSPD$ ساخته شده با پارامتر $1/\rho$ هستند، پس داریم:

$$\operatorname{diam}(R) \geq d(\square_u, \square_v) \geq \frac{1}{\rho} \operatorname{diam}(\square_u) \Rightarrow \operatorname{diam}(\square_u) \leq \rho \operatorname{diam}(R)$$

یعنی بیشترین قطر \square_u برابر با $daim(R)$ ، ρ و کمترین عمق برای چنین گره در درخت چهارتایی برابر با $\lceil \log \frac{\text{diam}(R)}{\rho \text{diam}(R)} \rceil \geq \log s$ می‌باشد، و به این ترتیب کران پایین بازه به دست می‌آید. \square



شکل ۶.۳: توزیع متغیر تصادفی D_q روی بازه‌ی I ، مربوط به اثبات ادعا

تا اینجا عمق گره‌هایی که در $SSPD$ ساخته شده برای زوج‌های $P_{in} \otimes P_{out}$ وجود دارند، معلوم است. برای به دست آوردن وزن این $SSPD$ ، ابتدا باید کرانی برای عبارت $\log \frac{r}{|D_q|}$ مشخص شود. ادعا می‌شود برای نقطه‌ی $q \in R = P_{in} \cup P_{out}$ امید ریاضی عبارت $\log \frac{r}{|D_q|}$ با $\mathcal{O}(1)$ کراندار می‌شود. برای اثبات این ادعا، فرض کنید $I = [a^*, b^*]$ بازه‌ی به طول r باشد که D_q به طور یکنواخت روی آن توزیع شده است. مشاهده‌ی ۱.۴.۳ را ببینید. اگر به ازای $i = 1, \dots, \infty$ بازه‌ی J_i ، به صورت $J_i = \left[\frac{r}{2^{i+1}}, \frac{r}{2^i} \right]$ تعریف شود، واضح است D_q در یکی از این بازه قرار می‌گیرد. شکل ۶.۳ را ببینید. از طرفی اگر $D_q \in J_i$ باشد آنگاه $-D_q \in -J_i$ است، یعنی $\frac{r}{2^{i+1}} \leq |D_q| \leq \frac{r}{2^i}$ ، که معادل است با $i \leq \log \frac{r}{|D_q|} \leq i + 1$. به طور خلاصه احتمال $i \leq \log \frac{r}{|D_q|} \leq i + 1$ برابر است با احتمال اینکه $D_q \in J_i$ یا $-D_q \in -J_i$ ، که هر یک برابر با $\frac{|J_i|}{r}$ است. بنابراین:

$$Pr \left[i \leq \log \frac{r}{|D_q|} \leq i + 1 \right] \leq \frac{2|J_i|}{r} \leq \frac{1}{2^i}$$

در نتیجه با توجه به این که $\log \frac{r}{|D_q|}$ حداکثر $i + 1$ است، و با استفاده از خواص سری هندسی داریم:

$$E \left[\log \frac{r}{|D_q|} \right] \leq \sum_{i=0}^{\infty} (i + 1) \cdot \frac{1}{2^i} = \mathcal{O}(1) \quad (۴-۳)$$

و به این ترتیب ادعا ثابت می‌شود.

لم ۳.۴.۳ وزن مورد انتظار زوج‌های $SSPD$ ساخته شده برای $P_{in} \otimes P_{out}$ در یک سطح از بازگشت، $\mathcal{O}(ns^d)$ است.

اثبات. باید اثبات شود که هر نقطه در مجموعه $R = P_{in} \cup P_{out}$ در چه تعداد زوج از $SSPD$ ساخته شده، ظاهر می‌شود. طبق لم ۲.۴.۳، هر نقطه‌ی $q \in R$ در زیرمجموعه‌ی کانونی گره‌هایی در $SSPD$ ظاهر می‌شود که گره‌ها دارای عمق در بازه‌ی $[\log s, X + \mathcal{O}(1) + \log s]$ هستند، به طوری که $X = \log \frac{r}{|D_q|}$. از آنجا که هر گره در درخت چهارتایی با حداکثر $\mathcal{O}(s^d)$ گره هم‌سطح خود، زوج $WSPD$ (و در نتیجه $SSPD$)، می‌سازد (مشاهده‌ی ۱.۲.۳ را ببینید)، بنابراین نقطه‌ی q در حداکثر $\mathcal{O}((1 + X).s^d)$ زوج ظاهر می‌شود. با توجه به رابطه‌ی ۳-۴، نتیجه می‌شود $\mathcal{O}(E[(1 + X).s^d]) = \mathcal{O}(s^d)$. با توجه به این‌که حداکثر $n/2$ نقطه در R وجود دارد، و هر نقطه در R ، به طور مورد انتظار در $\mathcal{O}(s^d)$ زوج ظاهر می‌شود، بنابراین وزن مورد انتظار $SSPD$ ساخته شده برای نقاط R ، در یک سطح از بازگشت، $\mathcal{O}(n.s^d)$ است. \square

تا اینجا وزن زوج‌های $SSPD$ پوشش دهنده‌ی زوج نقاط $P_{in} \otimes P_{out}$ ، در یک سطح از بازگشت، مشخص است. لم ۴.۴.۳ بیان می‌کند که در $SSPD$ محاسبه شده در پایان تمام بازگشت‌ها، هر نقطه، با احتمال بالا و به طور مورد انتظار، در $\mathcal{O}(s^d \log n)$ زوج کوتاه، ظاهر می‌شود. در نتیجه وزن مورد انتظار $SSPD$ محاسبه شده برای $P_{in} \otimes P_{out}$ ، برابر با $\mathcal{O}(ns^d \log n)$ است.

لم ۴.۴.۳ در $SSPD$ محاسبه شده، هر نقطه به طور مورد انتظار و با احتمال بالا، در حداکثر $\mathcal{O}(s^d \log n)$ زوج کوتاه ظاهر می‌شود.

اثبات. نقطه‌ی $q \in P$ را در نظر بگیرید، و فرض کنید X_k یک متغیر است که نشان دهنده‌ی تعداد زوج‌های کوتاهی است که این نقطه در k -امین سطح از بازگشت در آن‌ها ظاهر می‌شود. طبق لم ۲.۴.۳ و مشاهده‌ی ۱.۲.۳ داریم:

$$X_k = \mathcal{O}\left(\nu(q).s^d\right) = \mathcal{O}\left(s^d\left(1 + \log \frac{r}{|D_q|}\right)\right) = \mathcal{O}\left(s^d.(1 + Z_k)\right)$$

که $Z_k = \lg \frac{r}{|D_q|}$ ، و طبق رابطه‌ی ۳-۴، Z_k به طور مورد انتظار حداکثر $\mathcal{O}(1)$ می‌باشد. بنابراین تعداد زوج‌های کوتاهی که در آن ظاهر می‌شود، به وسیله‌ی مجموع h متغیر X_k ، هر یک با امید ریاضی $\mathcal{O}(s^d)$ کراندار می‌شود، که $h = \mathcal{O}(\log n)$ تعداد بازگشت‌ها است. متغیرهای X_k مربوط به سطوح مختلف از

□ بازگشت بوده و مستقل از یکدیگر هستند، لذا این مجموع برابر با $\mathcal{O}(s^d \log n)$ می‌باشد.

در ادامه لم ۵.۴.۳ اثبات می‌کند که هر نقطه در $\mathcal{O}(s^d \log n)$ زوج طویل، در کل بازگشت‌ها، ظاهر شده و در نتیجه وزن $SSPD$ محاسبه شده برای زوج‌های $P_{in} \otimes P_{outer}$ برابر با $\mathcal{O}(ns^d \log n)$ می‌باشد.

لم ۵.۴.۳ در $SSPD$ محاسبه شده هر نقطه در $\mathcal{O}(s^d \log n)$ زوج طویل ظاهر می‌شود.

اثبات. قبلاً گفته شد که در هر سطح از بازگشت، هر نقطه در حداکثر $\mathcal{O}(s^d)$ زوج طویل ظاهر می‌شود. از آنجا که تعداد بازگشت‌ها حداکثر $\mathcal{O}(\log n)$ بوده و هر نقطه تنها در یکی از بازگشت‌ها (بازگشت روی P_{in} یا روی $P_{out} \cup P_{outer}$) فراخوانی می‌شود، در نتیجه هر نقطه در $\mathcal{O}(s^d \log n)$ زوج طویل ظاهر می‌شود.

در نهایت لم ۶.۴.۳ کرانی برای وزن $SSPD$ ساخته شده، بیان می‌کند.

لم ۶.۴.۳ مجموعه نقاط P در \mathbb{R}^d و پارامتر $s > 0$ ، داده شده است. $SSPD$ ساخته شده برای مجموعه نقاط P دارای وزن مورد انتظار $\mathcal{O}(ns^d \log n)$ است و هر نقطه با احتمال بالا در $\mathcal{O}(s^d \log n)$ زوج ظاهر می‌شود.

□ اثبات. طبق لم ۴.۴.۳ و ۵.۴.۳ واضح است.

طبق این لم (لم ۶.۴.۳)، در بدترین حالت، تعداد زوج‌ها در $SSPD$ تولید شده، $\mathcal{O}(ns^d \log n)$ است، هر چند در ادامه روشی برای کاهش تعداد زوج‌ها، مطرح می‌شود.

تنها مساله‌ی باقیمانده در مورد $SSPD$ محاسبه شده با استفاده از روش مطرح شده در ۴.۳، زمان ساخت است. با توجه به روش ساخت $SSPD$ ، زمان ساخت شامل زمان لازم جهت جداسازی مجموعه نقاط P_{in} از P_{outer} و جداسازی مجموعه نقاط P_{in} از P_{out} ، در کل بازگشت‌ها است. لم ۷.۴.۳ زمان لازم جهت ساخت $SSPD$ برای $P_{in} \otimes P_{out}$ را، در یک سطح از بازگشت، بررسی می‌کند.

لم ۷.۴.۳ زوج‌های $SSPD$ ساخته شده در یک سطح از بازگشت برای $P_{in} \otimes P_{out}$ ، در زمان مورد انتظار $O(n.s^d)$ به دست می‌آیند.

اثبات. آنالیز زمان اجرا در دو بخش صورت می‌گیرد. اول: زمان ساخت درخت چهارتایی جزئی \mathcal{T} ، و دوم زمان تولید زوج‌ها. زیر بخش ۱.۴.۳ قسمت جداسازی مجموعه نقاط P_{in} از P_{out} را ببینید.

بخش اول: زمان ساخت درخت چهارتایی جزئی \mathcal{T} را می‌توان روی زمان مصرف شده برای حرکت نقاط به سمت پایین درخت، شارژ کرد. $R = P_{in} \cup P_{out}$ ، و نقطه‌ی $q \in R$ را در نظر بگیرید. طبق لم ۲.۴.۳، این نقطه در زوج‌های در نظر گرفته شده توسط الگوریتم، با ماکزیمم عمق $Y_q = O(1) + \lg s + \lg \frac{r}{|D_q|}$ ظاهر می‌شود. ماکزیمم عمق برای q ، عمق $Y_q + 1$ است. در واقع اگر الگوریتم بخواهد زوج گره‌هایی مانند (u, v) ، به طوری که $q \in P(u)$ یا $q \in P(v)$ است را تفکیک کند، آنگاه q درخت چهارتایی را به پایین حرکت می‌دهد. بنابراین زمان مورد انتظار ساخت \mathcal{T} متناسب با $E \left[\sum_{q \in R} Y_q \right]$ بوده، که با توجه به رابطه‌ی ۴-۳، و خطی بودن امید ریاضی برابر با $O(n \log(s))$ است.

بخش دوم: بررسی زمان تولید زوج‌ها. توجه کنید الگوریتم تنها گره‌های هم سطح را در نظر گرفته و برای نیم مجزا بودن بررسی می‌کند. گره u در درخت چهارتایی \mathcal{T} را در نظر بگیرید. الگوریتم، گره u را فقط با گره‌های هم سطح با u ، که تعدادشان حداکثر $O(s^d)$ است، بررسی می‌کند. زمان مصرف شده برای بررسی زوج‌های شامل گره u در $\alpha = \lceil \log s \rceil$ سطح اول، که هیچ زوجی در این سطوح تولید نمی‌شود، برابر با $O(s^{2d})$ است. لم ۲.۴.۳ را ببینید. از آنجا که $s^d \in O(n)$ (چون در غیر این صورت طبق روش ساخت مطرح شده در ۱.۴.۳ الگوریتم $WSPD$ با پارامتر s را برای نقاط محاسبه کرده و به عنوان $SSPD$ گزارش می‌کند)، بنابراین $O(s^{2d}) = O(n.s^d)$ ، زمان مصرف شده در α سطح اول برای بررسی زوج‌های شامل گره u می‌باشد.

برای کران دار کردن سایر عملیات در تولید زوج‌ها، نقطه‌ی $q \in R$ را در نظر بگیرید. زمان تمام فراخوانی‌ها در الگوریتم، که گره‌ای مانند u به طوری که $q \in P(u)$ است، را بررسی می‌کند با $O(Y_q.s^d)$ کراندار می‌شود. از طرفی چون زمان تولید زوج‌ها مطرح است و در α سطح اول هیچ زوجی تولید نمی‌شود، بنابراین می‌توان زمان صرف شده در α سطح اول را، برای تولید زوج‌ها، نادیده گرفت، و کل زمان مصرف شده برای تولید زوج‌های شامل نقطه‌ی q را با $O((Y_q - \alpha).s^d)$ کراندار کرد. طبق رابطه‌ی ۴-۳ این

□ کران برابر با $\mathcal{O}(s^d)$ است و برای حداکثر $n/2$ نقطه داخل R ، برابر با $\mathcal{O}(n.s^d)$ می‌باشد.

زمان لازم برای ساخت $SSPD$ برای $P_{in} \otimes P_{outer}$ ، در یک سطح از بازگشت، برابر با زمان خوشه‌بندی مجموعه نقاط P_{in} در $\mathcal{O}(s^d)$ خوشه و زمان لازم جهت گزارش زوجها است. با توجه به نحوه خوشه‌بندی این زمان $\mathcal{O}(n)$ می‌باشد. زیر بخش ۲.۴.۳ را ببینید. همچنین زوج‌های طویل به صورت (C_i'', P_{outer}) در زمان $\mathcal{O}(s^d)$ ، گزارش می‌شوند. بنابراین با توجه به لم ۷.۴.۳، زمان ساخت $SSPD$ روی مجموعه نقاط P ، در یک سطح از بازگشت، برابر با $\mathcal{O}(n.s^d)$ است.

لم ۸.۴.۳ مجموعه نقاط P در \mathbb{R}^d و پارامتر $s > 0$ ، داده شده است. $SSPD$ ساخته شده در بخش ۱.۴.۳، در زمان مورد انتظار $\mathcal{O}(n.s^d \log n)$ به دست می‌آید.

اثبات. در یک سطح از بازگشت، زمان مورد انتظار ساخت $\mathcal{O}(n.s^d)$ بوده، و عمق بازگشت

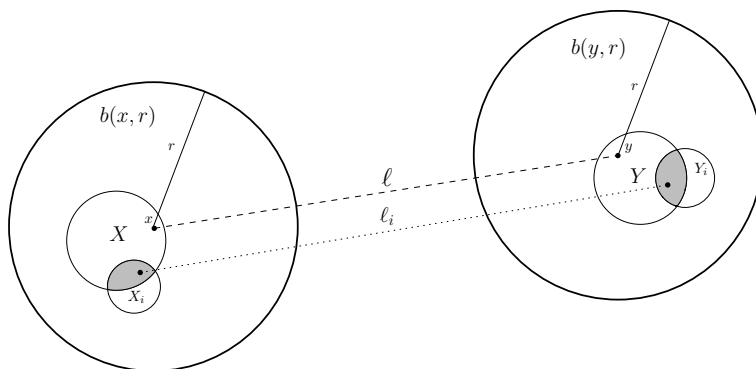
□ $\mathcal{O}(\log n)$ است. بنابراین زمان ساخت $SSPD$ برابر با $\mathcal{O}(n.s^d \log n)$ است.

۴.۴.۳ کاهش تعداد زوجها در $SSPD$ محاسبه شده

همان‌طور که در لم ۶.۴.۳ گفته شد، در بدترین حالت، تعداد زوجها $SSPD$ ساخته شده با استفاده از روش ساخت مطرح شده در ۱.۴.۳، $\Omega_s(n \log n)$ است Ω_s مقادیر ثابتی که از مرتبه‌ی چندجمله‌ای روی s است، را نادیده می‌گیرد؛ اما می‌توان تعداد زوجها تولید شده را به $\mathcal{O}(n.s^d)$ کاهش داد. ایده‌ی این کار، ادغام زوج‌هایی از $SSPD$ است، که نسبت به هم، زوجها کاملاً مجزا^{۱۶} هستند. از لم ۹.۴.۳ برای به کارگیری این ایده، استفاده می‌شود.

لم ۹.۴.۳ فرض کنید $s \geq 12$ و $s' \geq 6s$ پارامترهایی باشند، و (X, Y) یک زوج کاملاً مجزا با پارامتر s ، و (X_i, Y_i) ، به ازای $i = 1, \dots, k$ نیز زوجها کاملاً مجزا نسبت به پارامتر s' باشند. همچنین فرض کنید به ازای تمام مقادیر i داریم $X \cap X_i \neq \emptyset$ و $Y \cap Y_i \neq \emptyset$. آنگاه زوج $\mathcal{X} = \bigcup_i X_i$ و $\mathcal{Y} = \bigcup_i Y_i$ زوجها کاملاً مجزا با پارامتر $\frac{s}{4}$ هستند.

^{۱۶}Well Separated Pairs



شکل ۷.۳: مربوط به اثبات لم ۹.۴.۳.

اثبات. فرض کنید نقاط $x \in X$ و $y \in Y$ دو نقطه‌ای باشند که کمترین فاصله‌ی بین مجموعه نقاط X و Y را حاصل می‌کنند، یعنی $d(x, y) = d(X, Y) = \ell$. شکل ۷.۳ را ببینید. از آنجا که زوج X و Y دو مجموعه‌ی کاملاً مجزا با پارامتر s هستند، بنابراین $s \cdot \text{diam}(X) \leq \ell$ و $s \cdot \text{diam}(Y) \leq \ell$. به طرز مشابه به ازای تمام i ها فرض کنید $d(X_i, Y_i) = \ell_i$. داریم $s' \cdot \text{diam}(X_i) \leq \ell_i$ و $s' \cdot \text{diam}(Y_i) \leq \ell_i$. با توجه به روابط بالا، نامساوی زیر برقرار است:

$$\ell_i \leq d(X \cap X_i, Y \cap Y_i) \leq \ell + \text{diam}(X) + \text{diam}(Y) \leq (1 + 2/s)\ell. \quad (5-3)$$

به طور کلی، چون X و X_i ها با یکدیگر اشتراک ناتهی دارند، می‌توان گفت هر مجموعه‌ی X_i (یا Y_i) کاملاً داخل دایره‌ای به مرکز x (مرکز y) و شعاع $r = \ell/s + \ell_i/s'$ و شعاع $r = \ell/s + \ell_i/s'$ قرار می‌گیرد. بنابراین مجموعه‌ی \mathcal{X} و \mathcal{Y} ، به ترتیب داخل دایره‌های به مرکز x و مرکز y با شعاع r قرار می‌گیرند، دایره‌های $b(x, r)$ و $b(y, r)$ را در شکل ۷.۳ ببینید. فاصله‌ی بین این دو دایره حداقل $\ell - 2r$ است.

اگر داشته باشیم:

$$d(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = (1/\tau) \cdot \max(\text{diam}(\mathcal{X}), \text{diam}(\mathcal{Y}))$$

یعنی اگر \mathcal{X} و \mathcal{Y} نسبت به پارامتر $1/\tau$ ، کاملاً مجزا باشند، می‌توان کرانی برای τ به صورت زیر به دست

آورد:

$$\begin{aligned}
 \tau &= \frac{\max(\text{diam}(\mathcal{X}), \text{diam}(\mathcal{Y}))}{d(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} \\
 &\leq \frac{2r}{\ell - 2r} \\
 &= \frac{2\ell/s + 2\ell_i/s'}{\ell - 2\ell/s - 2\ell_i/s'} \\
 &\leq \frac{2\ell/s + 2(1 + 2/s)\ell/s'}{\ell - 2\ell/s - 2(1 + 2/s)\ell/s'} \\
 &= \frac{2/s + 2/s'(1 + 2/s)}{1 - 2/s - 2/s'(1 + 2/s)} \\
 &\leq \frac{3/s}{1 - 3/s} \leq 4/s
 \end{aligned}$$

توجه کنید نامساوی دوم با توجه به رابطه‌ی ۳-۵، و نامساوی سوم با توجه به این که $s \geq 12$ و $s' \geq 6s$ است، برقرار می‌باشد. از عبارت بالا داریم $\tau \leq 4/s$ ، در نتیجه $1/\tau \geq s/4$ ، و از آنجا که \mathcal{X} و \mathcal{Y} $1/\tau$ -مجزا هستند، بنابراین می‌توان گفت \mathcal{X} و \mathcal{Y} دو مجموعه‌ی کاملاً مجزا با پارامتر $\frac{s}{4}$ نیز هستند. \square

فرض کنید δ ، $SSPD$ تولید شده با پارامتر $\mathcal{O}(s)$ ، برای مجموعه نقاط P باشد. به منظور کاهش تعداد زوج‌ها، زوج‌های کوتاه تولید شده، با توجه به شرایطی، ادغام می‌شوند. توجه کنید که تنها زوج‌های کوتاه ادغام می‌شوند و زوج‌های طویل بدون تغییر باقی می‌مانند. به این منظور، ابتدا یک $WSPD$ ، مانند \mathcal{W} ، با پارامتر $\mathcal{O}(s)$ ، برای نقاط P محاسبه می‌شود، زیر بخش ۱.۲.۳ را ببینید. سپس به ازای هر زوج کوتاه مانند (A, B) در δ ، دو نقطه‌ی دلخواه $q \in A$ و $r \in B$ انتخاب می‌شوند، و زوج (X, Y) ، متناظر با آن در \mathcal{W} که $q \in X$ و $r \in Y$ (یا بر عکس) است، در زمان ثابت با تکنیک شبکه بندی^{۱۷} و درهم سازی^{۱۸}، که در مرجع [۱۵] بیان شده است، پیدا می‌شود. طبق لم ۴.۴.۳ هر نقطه در $\mathcal{O}(s^d \log n)$ زوج کوتاه ظاهر می‌شود و بنابراین تعداد زوج‌های کوتاه حداکثر $\mathcal{O}(ns^d \log n)$ است، در نتیجه در زمان $\mathcal{O}(ns^d \log n)$ ، برای همه‌ی زوج‌های کوتاه در δ ، زوج متناظر در \mathcal{W} به دست می‌آید. حال تمام زوج‌های کوتاه $(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1), \dots, (\mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_k)$ عضو δ ، که متناظر با زوج $(X, Y) \in \mathcal{W}$ هستند، ادغام شده و با

^{۱۷}Gridding

^{۱۸}Hashing

زوج $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ، به طوری که $\mathcal{X} = \left(\bigcup_i X_i\right)$ و $\mathcal{Y} = \left(\bigcup_i Y_i\right)$ ، به ازای $i = 1, 2, \dots, k$ ، جایگزین می‌شوند. از آنجا که زوج‌های کوتاه در δ ، با استفاده از درخت چهارتایی و با بررسی شرط کاملاً مجزا بودن نسبت به پارامتر $\rho = (s/4)$ حاصل می‌شوند، در نتیجه علاوه بر نیم مجزا بودن، کاملاً مجزا با پارامتر $(s/4) \in \mathcal{O}(s)$ هستند، زیر بخش ۱۰.۴.۳ قسمت جداسازی نقاط P_{in} از P_{out} را ببینید، طبق لم ۹.۴.۳ می‌توان گفت زوج $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ، کاملاً مجزا با پارامتر $\mathcal{O}(s)$ است. در نتیجه در پایان ادغام و جایگزینی، یک $SSPD$ با پارامتر $\mathcal{O}(s)$ حاصل می‌شود که زوج‌های طویل آن همان زوج‌های طویل $SSPD$ قبل از ادغام است و تعداد این زوج‌ها $\mathcal{O}(n.s^d)$ است. تعداد زوج‌های کوتاه، پس از ادغام، به اندازه‌ی تعداد زوج‌های $WSPD$ ساخته شده روی مجموعه نقاط P ، یعنی $|\mathcal{W}|$ است. در لم ۱۰.۴.۳ ثابت می‌شود که $|\mathcal{W}|$ و در نتیجه تعداد زوج‌های کوتاه $SSPD$ پس از ادغام، حداکثر $\mathcal{O}(n.s^d)$ است. به این ترتیب تعداد کل زوج‌های $SSPD$ ، کاهش می‌یابد و حداکثر $\mathcal{O}(n.s^d)$ خواهد بود. واضح است ادغام زوج‌های کوتاه در زمانی متناسب با وزن $SSPD$ اولیه (قبل از ادغام زوج‌های کوتاه)، انجام می‌گیرد، و فرآیند ادغام وزن $SSPD$ را تغییر نمی‌دهد.

لم ۱۰.۴.۳ تعداد زوج‌های $WSPD$ ساخته شده روی مجموعه نقاط P ، و در نتیجه تعداد زوج‌های کوتاه $SSPD$ پس از ادغام، حداکثر $\mathcal{O}(n.s^d)$ است.

اثبات. هر گره‌ی u در درخت چهارتایی، حداکثر با $\mathcal{O}(s^d)$ گره دیگر، زوج $WSPD$ می‌سازد. در هر سطح از درخت چهارتایی حداکثر n گره وجود دارد و تعداد سطوح درخت $\mathcal{O}(\log \phi)$ است، بخش ۲.۳ را ببینید، در نتیجه تعداد زوج‌ها $\mathcal{O}(s^d.n \log \phi)$ است. از آنجا که فرض کرده‌ایم پراکندگی نقاط محدود است، بنابراین تعداد زوج‌های $WSPD$ حداکثر $\mathcal{O}(n.s^d)$ می‌باشد. \square

لم ۱۱.۴.۳ بیانگر فرآیند کاهش تعداد زوج‌های $SSPD$ است.

لم ۱۱.۴.۳ یک $SSPD$ با پارامتر $\mathcal{O}(s)$ ، با وزن $\mathcal{O}(n.s^d \log n)$ ، داده شده است. می‌توان با ثابت ماندن وزن، تعداد زوج‌های این $SSPD$ را در زمان $\mathcal{O}(n.s^d \log n)$ ، به $\mathcal{O}(n.s^d)$ کاهش داد.

نتیجه ۱۲.۴.۳ مجموعه نقاط P در \mathbb{R}^d ، و پارامتر $s > 0$ داده شده است، می‌توان در زمان مورد انتظار $\mathcal{O}(n.s^d \log n)$ ، مجموعه نقاط P را به زوج‌های نیم مجزا تجزیه کرد به طوری که:

الف) وزن مورد انتظار زوج‌ها حداکثر $O(ns^d \log n)$ باشد.

ب) هر نقطه به طور مورد انتظار و با احتمال بالا، در حداکثر $O(s^d \log n)$ زوج ظاهر شود.

ج) تعداد کل زوج‌ها حداکثر $O(n.s^d)$ باشد.

لازم به ذکر است روش‌های ساخت مطرح شده در این فصل، که در فضای اقلیدسی بررسی شده‌اند، به فضاهای متریک دارای بعد مضاعف کراندار^{۱۹} (زیربخش ۲.۱ از فصل یک را برای توضیحات بیشتر ببینید)، قابل تعمیم است، که به عنوان یک نتیجه در اینجا آورده شده است:

نتیجه ۱۳.۴.۳ ([۲]) فرض کنید P مجموعه‌ای از n نقطه در یک فضای متریک دارای بعد مضاعف کراندار dim و $s > 0$ یک پارامتر داده شده است، می‌توان در زمان مورد انتظار $O(ns^{O(dim)} \log n)$ مجموعه نقاط P را به زوج‌های نیم مجزا تجزیه کرد به طوری که:

الف) وزن مورد انتظار زوج‌ها حداکثر $O(ns^{O(dim)} \log n)$ باشد.

ب) هر نقطه به طور مورد انتظار و با احتمال بالا، در حداکثر $O(s^{O(dim)} \log n)$ زوج ظاهر شود.

ج) تعداد کل زوج‌ها حداکثر $O(n.s^{O(dim)})$ باشد.

^{۱۹}Bounded Doubling Dimension

فصل ۴

کاربردها

تا به این جا، روش های ساخت تجزیه نقاط به زوج های نیم مجزا برای نقاط در صفحه، و فضای \mathbb{R}^d مطرح شد؛ تجزیه نقاط به زوج های نیم مجزا، کاربردهایی در زمینه ی یافتن نزدیک ترین زوج^۱ در بین یک مجموعه از نقاط، و همچنین در زمینه ی ساخت پوشش های هندسی دارد؛ به عنوان نمونه، در مقاله ی [۲]، الگوریتم هایی ارائه شده است که از تجزیه زوج های نیم مجزا، جهت طراحی و ساخت: (الف) ساختار داده ای برای یافتن نزدیک ترین زوج نقاط در هر نیم صفحه ی پرس و جو، برای نقاط در صفحه، (ب) پوشش های هندسی برای نقاط غیر دقیق در فضای \mathbb{R}^d ، (ج) پوشش های هندسی برای گراف های کامل k -بخشی^۲ و (د) ساخت پوشش هایی با قطر کم، استفاده می کنند. در این فصل به کاربردهایی از تجزیه زوج های نیم مجزا، در ساخت پوشش های هندسی، اشاره شده است. مطالب این فصل برگرفته از مقاله های [۲]، [۳] و [۶] است.

۱.۴ ساخت یک $(1 + \varepsilon)$ -پوشش

در این بخش نحوه ی ساخت یک $(1 + \varepsilon)$ -پوشش، برای مجموعه نقاط در فضای \mathbb{R}^d شرح داده می شود. فرض کنید P مجموعه ای از n نقطه در \mathbb{R}^d و ψ یک پارامتر باشد. یک مخروط^۳، ناحیه ی حاصل از اشتراک d نیم-فضای^۴ غیر موازی است، به طوری که زاویه ی بین هر دو اشعه ی^۵ صادر شده از رأس مخروط و در داخل آن، کمتر از ψ باشد. مجموعه ی C را یک مجموعه از ψ مخروط های مجزا در نظر بگیرید که رأس همه ی آنها مبدأ مختصات باشد و با هم، کل فضای \mathbb{R}^d را پوشش دهند (ناحیه ی اشتراک آنها تنها می تواند مرز مخروط ها باشد). به مخروط های متعلق به C ، مخروط های کانونی^۶ گویند. شکل ۱.۴ را برای حالت دو بعدی و با $\psi = 22/5^\circ$ ببینید. ثابت می شود که $|\psi|$ حداکثر $O(1/\psi^{d-1})$ است (اثبات آن در فصل ۵ از کتاب [۲۰] آمده است). برای نمونه وقتی $d = 2$ است (برای نقاط در صفحه)، مخروط های

^۱Nearest Neighbor

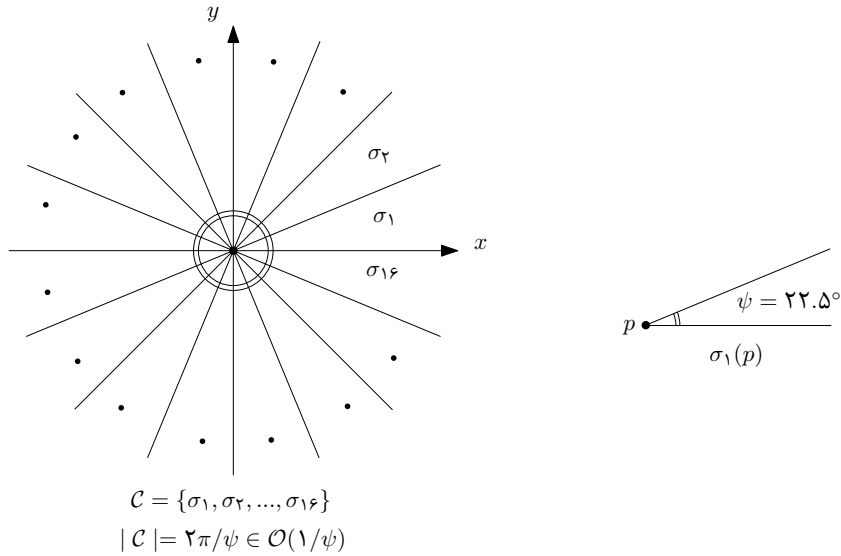
^۲Complete k-Partite Graphs

^۳ ψ -Cone

^۴Half-Space

^۵Ray

^۶Canonical Cones



شکل ۱.۴: مخروط‌های کانونی در صفحه برای $\psi = 22.5^\circ$ و مخروط انتقال یافته‌ی σ_1 به نقطه‌ی p .

کانونی می‌توانند با رسم $O(1/\psi)$ اشعه که از مبدأ صادر می‌شوند و زاویه‌ی بین هر دو اشعه‌ی متوالی حداکثر ψ است، به دست آیند. شکل ۱.۴ را ببینید. می‌توان این مجموعه از مخروط‌های کانونی را به عنوان شبکه‌ی^۷ ایجاد شده با نیم فضاها در نظر گرفت؛ به طوری که برای نقطه‌ای مانند p ، مخروط شامل p ، با توجه به موقعیت این نقطه و در زمان ثابت، معین می‌شود؛ در واقع اگر راس مشترک مخروط‌ها با o نشان داده شود، می‌توان با محاسبه‌ی زاویه‌ی بین پاره خط \overline{op} و جهت مثبت محور x ، مخروط شامل نقطه‌ی p را در زمان ثابت، یافت. برای هر مخروط مانند $\sigma \in C$ ، و یک نقطه‌ی $p \in \mathbb{R}^d$ ، $\sigma(p)$ نشان دهنده‌ی مخروط σ است که رأس آن به نقطه‌ی p انتقال یافته است؛ در واقع $\sigma(p)$ نسخه‌ی انتقال یافته‌ی مخروط σ است که رأس آن بر روی نقطه‌ی p منطبق شده است. شکل ۱.۴ را ببینید.

۱.۱.۴ ساخت یک $(1 + \varepsilon)$ -پوشش با استفاده از SSPD

مجموعه نقاط P در فضای \mathbb{R}^d را در نظر بگیرید. برای ساخت یک $(1 + \varepsilon)$ -پوشش برای P (به طوری که $0 < \varepsilon < 1$)، ابتدا یک SSPD با پارامتر $1/\rho$ ، به طوری که $\rho \leq \varepsilon/8$ است، روی مجموعه نقاط P ساخته می‌شود. فرض کنید SSPD به دست آمده δ باشد. این SSPD با استفاده از مخروط‌های کانونی که در بالا توضیح داده شد، و با انجام عملیاتی، به یک $(1 + \varepsilon)$ -پوشش تبدیل می‌شود. ایده‌ی تبدیل به

^۷Grid

این صورت است: فرض کنید $\psi = \varepsilon/4^\circ$ باشد (حداکثر زاویه‌ی رأس مجموعه مخروط‌های کانونی). گراف \mathcal{G} را که مجموعه نقاط P به عنوان رئوس آن هستند و مجموعه یال‌های آن تهی است، در نظر بگیرید. در هر مرحله از فرآیند تبدیل، تعدادی یال به گراف \mathcal{G} اضافه می‌شود و در نهایت گرافی که حاصل می‌شود، یک $(1 + \varepsilon)$ -پوشش روی مجموعه نقاط P می‌باشد. اضافه شدن یال‌ها به گراف \mathcal{G} به این صورت است که به ازای هر زوج $\delta \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ یک نقطه‌ی دلخواه مانند p از مجموعه‌ی کوچک‌تر انتخاب می‌شود (در این جا فرض کنید مجموعه‌ی کوچک‌تر، مجموعه‌ی \mathcal{X} باشد). نقطه‌ی p ، قطب^۱ مجموعه‌ی \mathcal{X} نامیده می‌شود و با $hub(\mathcal{X})$ نشان داده می‌شود. پس از انتخاب نقطه‌ی دلخواه p از مجموعه‌ی کوچک‌تر، مجموعه مخروط‌های کانونی \mathcal{C} به نقطه‌ی p انتقال می‌یابند، سپس به ازای هر مخروط کانونی مانند $\sigma \in \mathcal{C}$ ، نقطه‌ی p به نزدیک‌ترین نقطه مانند q در مجموعه‌ی نقاط $\mathcal{Y} \cap \sigma(p)$ متصل می‌شود (در صورتی که q منحصر به فرد نبود، به یکی از نقاط به دلخواه وصل می‌شود). به این ترتیب یال (p, q) به گراف \mathcal{G} اضافه شده و وزن این یال فاصله‌ی بین p و q در نظر گرفته می‌شود. طبق این روش ساخت، هر زوج مانند $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ متعلق به δ ، به تعداد مخروط‌های کانونی یعنی $|\mathcal{C}|$ ، یال به گراف \mathcal{G} اضافه می‌کند و در نهایت گراف \mathcal{G} با مجموعه رئوس P و مجموعه یال‌های اضافه شده به آن، یک $(1 + \varepsilon)$ -پوشش است؛ این ادعا در ادامه اثبات می‌شود.

قضیه ۱.۱.۴. یک $SSPD$ با نام δ ، و با پارامتر δ/ε برای مجموعه نقاط P در فضای \mathbb{R}^d داده شده است. می‌توان یک $(1 + \varepsilon)$ -پوشش برای مجموعه نقاط P با $\mathcal{O}(|\delta|/\varepsilon^{d-1})$ تعداد یال ساخت، که $|\delta|$ تعداد زوج‌های δ است، به طوری که هر نقطه که در k زوج از δ ظاهر می‌شود، در پوشش به دست آمده دارای حداکثر درجه‌ی $\mathcal{O}(k/\varepsilon^{d-1})$ ، می‌باشد.

اثبات. گفته شد تعداد مخروط‌های کانونی $\mathcal{O}(1/\psi^{d-1})$ است، و فرض شد که $\psi = \varepsilon/4^\circ$ است (با توجه به روش ساخت پوشش با استفاده از $SSPD$ که شرح داده شد)، بنابراین تعداد مخروط‌های کانونی $\mathcal{O}(1/\varepsilon^{d-1})$ است. همچنین گفته شد که هر زوج $\delta \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ به تعداد مخروط‌های کانونی، یال به گراف، اضافه می‌کند؛ در نتیجه تعداد کل یال‌های پوشش برابر با $\mathcal{O}(|\delta|/\varepsilon^{d-1})$ است. واضح است هر نقطه که در k زوج از δ ظاهر شده است، در هر زوج به حداکثر $\mathcal{O}(1/\varepsilon^{d-1})$ نقطه‌ی دیگر وصل می‌شود و در

^۱Hub

نتیجه به ازای k زوج، به $\mathcal{O}(k/\varepsilon^{d-1})$ نقطه‌ی دیگر وصل شده و دارای حداکثر درجه‌ی مذکور در پوشش می‌باشد. برای اثبات این که گراف \mathcal{G} در پایان اضافه شدن یال‌ها یک $(1 + \varepsilon)$ -پوشش است، ابتدا زوج نقاط در P از لحاظ فاصله‌ی بینشان، به ترتیب صعودی مرتب می‌شوند. فرض کنید $p_1q_1, p_2q_2, \dots, p_uq_u$ ، که $u = \binom{n}{2}$ زوج‌های مرتب شده به ترتیب صعودی باشند. حال از استقرا استفاده می‌شود و اثبات می‌شود به ازای هر دو نقطه‌ی دلخواه مانند p و q در \mathcal{G} یک $(1 + \varepsilon)$ -مسیر بین آن‌ها وجود دارد و در واقع \mathcal{G} یک $(1 + \varepsilon)$ -پوشش روی مجموعه نقاط P است.

پایه‌ی استقرا: یال (p_1, q_1) در \mathcal{G} وجود دارد؛ واضح است، از آن‌جا که p_1 و q_1 نزدیک‌ترین زوج در مجموعه نقاط P است، تنها زوج نیم مجزایی که می‌تواند شامل این دو نقطه باشد، زوج (p_1, q_1) است. طبق روش ساخت پوشش، هنگام پیمایش این زوج، یال (p_1, q_1) به پوشش اضافه می‌شود، که این یال، یک $(1 + \varepsilon)$ -مسیر بین این دو نقطه است.

فرض استقرا: فرض کنید به ازای $i \leq k$ حکم برقرار باشد، و مسیر بین دو نقطه‌ی p_i و q_i در گراف \mathcal{G} یک $(1 + \varepsilon)$ -مسیر باشد. به عبارتی: $d_{\mathcal{G}}(p_i, q_i) \leq (1 + \varepsilon) \|p_i q_i\|$ باشد. گام استقرا: قرار دهید: $s = p_{k+1}$ و $t = q_{k+1}$. اثبات می‌شود بین s و t یک $(1 + \varepsilon)$ -مسیر در \mathcal{G} وجود دارد.

برای اثبات حکم، فرض کنید $(\mathcal{X}_j, \mathcal{Y}_j) \in \delta$ ، به طوری که $s \in \mathcal{X}_j$ و $t \in \mathcal{Y}_j$ باشد. همچنین فرض کنید \mathcal{X}_j مجموعه‌ی کوچک‌تر بوده و نقطه‌ی $p = \text{hub}(\mathcal{X}_j)$ است. مخروط کانونی شامل t را در نظر بگیرید و فرض کنید نقطه‌ی q نزدیک‌ترین نقطه به p در این مخروط باشد. شکل ۲.۴ را ببینید. با توجه به نحوه‌ی ساخت، یال (p, q) داخل پوشش قرار دارد.

مشاهده ۲.۱.۴ به شکل ۲.۴ توجه کنید؛ نامساوی‌های زیر برقرار هستند:

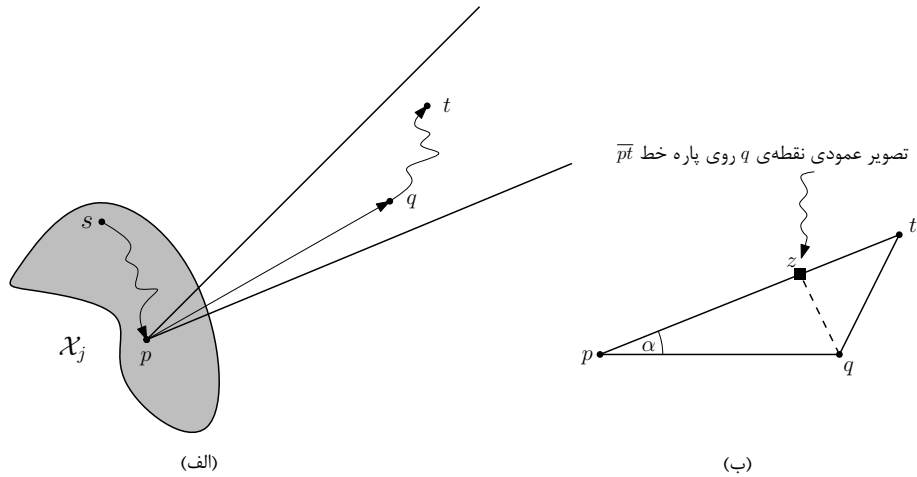
$$\|st\| \geq \|sp\| \text{ و } \|st\| \geq \|qt\|.$$

اثبات. نامساوی اول: از آنجا که $s, p \in \mathcal{X}_j$ و $t \in \mathcal{Y}_j$ ، با توجه به نیم مجزا بودن زوج‌های $SSPD$

می‌توان گفت:

$$\|st\| \geq d(\mathcal{X}_j, \mathcal{Y}_j) \geq \lambda/\varepsilon \cdot \text{diam}(\mathcal{X}_j) \geq \lambda/\varepsilon \cdot \|sp\|.$$

$$\text{بنابراین } \|st\| \geq \|sp\|.$$



شکل ۲.۴: مربوط به اثبات قضیه‌ی ۱.۱.۴

برای اثبات نامساوی دوم، ابتدا ثابت می‌شود که $\|st\| \simeq \|pt\|$ ، سپس اثبات $\|pt\| \geq \|qt\|$ و در نتیجه نامساوی $\|st\| \geq \|qt\|$ ثابت می‌شود. با توجه به نامساوی مثلثی می‌توان گفت:

$$\|pt\| \leq \|sp\| + \|st\|. \quad (۱-۴)$$

همچنین با توجه به خاصیت نیم مجزا بودن زوج‌های SSPD، داریم:

$$\|sp\| \leq (\varepsilon/\lambda)\|pt\|. \quad (۲-۴)$$

با ترکیب دو رابطه‌ی ۱-۴ و ۲-۴ داریم:

$$\|pt\| \leq (\varepsilon/\lambda)\|pt\| + \|st\|.$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \|pt\| - (\varepsilon/\lambda)\|pt\| &\leq \|st\| \\ \|pt\| &\leq \left(\frac{\lambda}{\lambda - \varepsilon}\right)\|st\|. \end{aligned}$$

با توجه به این که $0 < \varepsilon < 1$ است، می‌توان گفت $\|pt\|$ برابر با ضریبی نزدیک به یک از $\|st\|$ است و بنابراین: $\|st\| \simeq \|pt\|$.

حال برای اثبات $\|pt\| \geq \|qt\|$ ، با توجه به قسمت (ب) در شکل ۲.۴، z تصویر نقطه‌ی q روی پاره خط \overline{pt} است، و رابطه‌ی $\|pt\| = \|pz\| + \|zt\|$ برقرار است. قرار دهید $\alpha = \angle tpq \leq \psi$. از آنجا که

بنابراین $\psi = \varepsilon/4^\circ \leq \pi/3$ ، $\cos \alpha \geq \cos \psi \geq 1/2$ و $\sin \alpha \leq \alpha \leq \psi$ و در نتیجه $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \leq 2\psi$ بوده و $\|zq\| = \|pz\| \tan \alpha \leq 2\psi \|pz\|$ است؛ با توجه به این نامساوی‌ها و نامساوی مثلثی، داریم:

$$\begin{aligned} \Delta &= \|pq\| + (1 + \varepsilon)\|qt\| - \|pt\| \leq \|pz\| + \|zq\| + (1 + \varepsilon)(\|zq\| + \|zt\|) - \|pz\| - \|zt\| \\ &\leq (2 + \varepsilon)\|zq\| + \varepsilon\|zt\| \leq 2\psi(2 + \varepsilon)\|pz\| + \varepsilon\|zt\| \leq 6\psi\|pz\| + \varepsilon\|zt\| \\ &\leq (6\psi - \varepsilon)\|pz\| + \varepsilon(\|pz\| + \|zt\|) = (6\psi - \varepsilon)\|pz\| + \varepsilon\|pt\|. \end{aligned} \quad (3-4)$$

با توجه به این که $\psi = \varepsilon/4^\circ \leq \varepsilon/12$ است بنابراین $(6\psi - \varepsilon) < 0$ ، و در نتیجه:

$$\Delta = \|pq\| + (1 + \varepsilon)\|qt\| - \|pt\| \leq \varepsilon\|pt\|. \quad (4-4)$$

با توجه به رابطه‌ی 4-4:

$$(1 + \varepsilon)\|qt\| \leq (1 + \varepsilon)\|pt\|.$$

بنابراین $\|pt\| \geq \|qt\|$ ، و با توجه به این که $\|st\| \simeq \|pt\|$ است، نتیجه می‌شود $\|st\| \geq \|qt\|$. □

با توجه نتایج به دست آمده از مشاهده‌ی 2.1.4، و طبق فرض استقرا می‌توان گفت:

$$\begin{aligned} d_G(q, t) &\leq (1 + \varepsilon)\|qt\|, \\ d_G(s, p) &\leq (1 + \varepsilon)\|sp\|. \end{aligned} \quad (5-4)$$

اختلاف میان کوتاه‌ترین مسیر بین رأس‌های s و t ، با فاصله‌ی بین این دو رأس را برابر با \mathcal{E} در نظر بگیرید؛ حال با توجه به رابطه‌ی 5-4، و با استفاده از نامساوی مثلثی و همچنین با توجه به این که $0 < \varepsilon < 1$ است، روابط زیر نتیجه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= d_G(s, t) - \|st\| \leq (1 + \varepsilon)\|sp\| + \|pq\| + (1 + \varepsilon)\|qt\| - \|st\| \\ &\leq 2\|sp\| + \|pq\| + (1 + \varepsilon)\|qt\| - \|pt\| + \|sp\| \\ &= 3\|sp\| + \underbrace{\|pq\| + (1 + \varepsilon)\|qt\| - \|pt\|}_{\Delta} \end{aligned}$$

طبق رابطه‌ی ۳-۴، مقدار Δ با $\Delta \leq (\epsilon\psi - \epsilon)\|pz\| + \epsilon\|pt\|$ کراندار می‌شود. به شکل ۲.۴ قسمت (ب) توجه کنید؛ $\|pq\|$ وتر مثلث قائم الزاویه‌ی pzq است، بنابراین $\|pz\| \leq \|pq\|$ ؛ همچنین با توجه به نیم مجزا بودن زوج‌ها در $SSPD$ ، رابطه‌ی $\|sp\| \leq (\epsilon/8)\|pq\|$ برقرار است. حال با توجه به این که $1 > \epsilon > 0$ است، و با استفاده از نامساوی مثلثی، می‌توان گفت:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\leq 3\|sp\| + \Delta \leq 3\|sp\| + (\epsilon\psi - \epsilon)\|pz\| + \epsilon(\|sp\| + \|st\|) \\ &\leq 4\|sp\| + (\epsilon\psi - \epsilon)\|pz\| + \epsilon\|st\| \leq \frac{\epsilon}{4}\|pq\| + (\epsilon\psi - \epsilon)\|pq\| + \epsilon\|st\| \\ &= (\epsilon\psi - \frac{\epsilon}{4})\|pq\| + \epsilon\|st\| \leq \epsilon\|st\|. \end{aligned}$$

نامساوی آخر به این دلیل است که $\psi = \epsilon/4 \leq \epsilon/12 \leq \epsilon/4 \leq \epsilon/4$ بوده و بنابراین $(\epsilon\psi - \frac{\epsilon}{4}) \leq 0$ است. در نهایت نتیجه می‌شود $d_G(s, t) \leq (1 + \epsilon)\|st\|$ ، و این یعنی یک $(1 + \epsilon)$ -مسیر بین s و t در گراف \mathcal{G} وجود دارد و حکم ثابت می‌شود. در نتیجه گراف \mathcal{G} یک $(1 + \epsilon)$ -پوشش روی مجموعه نقاط P است. \square

تنها مسأله‌ی باقیمانده، زمان ساخت پوشش است. در واقع سوال این است که زمان تبدیل $SSPD$ به یک $(1 + \epsilon)$ -پوشش، چقدر است؟ برای پاسخ به این سوال، با توجه به روش ساخت که در زیر بخش ۱.۱.۴ آمده است، هر زوج از $SSPD$ مانند $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ، پیمایش و بررسی می‌شود و برای هر زوج عملیات زیر انجام می‌شود:

در ابتدا باید مشخص شود قطر کدام یک از مجموعه نقاط \mathcal{X} و \mathcal{Y} به صورت تقریبی، بزرگ‌تر است، یعنی آیا $diam(\mathcal{X}) = \mathcal{O}(diam(\mathcal{Y}))$ است یا $diam(\mathcal{Y}) = \mathcal{O}(diam(\mathcal{X}))$ ؟ به این منظور برای هر یک از دو مجموعه‌ی \mathcal{X} و \mathcal{Y} ، ابتدا نقاط ماکزیمم و مینیمم در هر یک از d بعد، و سپس فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی ماکزیمم و مینیمم در هر بعد، محاسبه می‌شوند؛ در نهایت با به دست آوردن بیش‌ترین مقدار بین فاصله‌های محاسبه شده، قطر تقریبی برای مجموعه نقاط \mathcal{X} و \mathcal{Y} ، در زمان $\mathcal{O}(|\mathcal{X}| + |\mathcal{Y}|)$ محاسبه می‌شود. فرض کنید مجموعه‌ی \mathcal{X} دارای قطر کمتری است، و $p = hub(\mathcal{X})$ است؛ باید نزدیک‌ترین نقطه در مجموعه نقاط $\mathcal{V}^{(i)} = \mathcal{Y} \cap \sigma(p)$ ، به ازای همه‌ی مخروط‌های کانونی $\sigma(p)$ محاسبه شده و به نقطه‌ی $p = hub(\mathcal{X})$ متصل شود. برای این منظور ابتدا تمامی نقاط مجموعه‌ی \mathcal{V} ، یک به یک پیمایش

می‌شوند تا مخروط کانونی شامل هر یک از این نقاط تعیین شوند. این کار در زمان $\mathcal{O}(|\mathcal{Y}|)$ قابل اجرا است؛ سپس به ازای مجموعه نقاط $\mathcal{Y}^{(i)}$ ، در هر یک از مخروط‌های کانونی $\sigma(p)$ ، نزدیک‌ترین نقطه، به نقطه‌ی p ، در زمان $\mathcal{O}(|\mathcal{Y}^{(i)}|)$ یافت می‌شود؛ به این ترتیب نزدیک‌ترین نقطه به $p = \text{hub}(\mathcal{X})$ ، به ازای همه‌ی مخروط‌های کانونی $\sigma(p)$ ، و در نتیجه یال‌های ایجاد شده در پوشش به ازای زوج $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ، در زمان $\mathcal{O}(|\mathcal{X}| + |\mathcal{Y}|)$ حاصل می‌شوند. بنابراین می‌توان برای همه‌ی زوج‌های $SSPD$ ، این عملیات را در زمان

$$\sum_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in SSPD} \mathcal{O}(|\mathcal{X}| + |\mathcal{Y}|)$$

متناسب با وزن $SSPD$ اجرا کرد.

نتیجه ۳.۱.۴ یک $SSPD - \delta/\epsilon$ ، با نام δ برای مجموعه نقاط P در فضای \mathbb{R}^d داده شده است. می‌توان یک $(1 + \epsilon)$ -پوشش برای مجموعه نقاط P با $\mathcal{O}(|\delta|/\epsilon^{d-1})$ تعداد یال ساخت، که $|\delta|$ تعداد زوج‌های δ است، به طوری که هر نقطه که در k زوج از δ ظاهر می‌شود، در پوشش به دست آمده دارای حداکثر درجه‌ی $\mathcal{O}(k/\epsilon^{d-1})$ می‌باشد. این $(1 + \epsilon)$ -پوشش در زمانی متناسب با وزن $SSPD$ ، ساخته می‌شود.

۲.۴ ساخت t -پوشش برای نقاط غیردقیق

در گذشته تصور می‌شد که داده‌های ورودی به یک مسأله، به عنوان مثال نقاط ورودی، دقیق و بدون خطا هستند، اما در واقع داده‌های ورودی، حاصل از اندازه‌گیری ابزاری است که دارای دقت محدودی بوده و در نتیجه دارای خطا هستند. دادن داده‌های غیردقیق به یک الگوریتم به عنوان ورودی، ممکن است باعث تولید خروجی اشتباه شود. یک راه‌حل برای این مشکل، طراحی الگوریتم‌هایی است که در ابتدا داده‌های غیردقیق را مدل می‌کنند و روی داده‌های مدل شده کار می‌کنند. برای مثال یکی از مدل‌های معمول و ممکن برای مجموعه‌ای از نقاط غیردقیق^۹، در نظر گرفتن آن‌ها به صورت ناحیه‌های دایره‌ای است به طوری که هر دایره همه‌ی موقعیت‌های ممکن برای یک نقطه را نشان می‌دهد. هر نقطه‌ی غیردقیق مانند $p \in \mathbb{R}^d$ ، توسط دایره‌ی $D = (c, r)$ (در واقع منظور از دایره در فضای \mathbb{R}^d ، گوی d بعدی^{۱۰} است)، با مرکز c و شعاع r ، مدل می‌شود؛ همچنین فرض گرفته می‌شود که دایره‌ها دو به دو مجزا هستند، این فرض غیر واقعی نیست، زیرا به عنوان نمونه در ساخت شبکه‌ی جاده‌ای بین شهرها، که یک کاربرد معمول از

^۹Imprecise Points

^{۱۰}d-Ball

t -پوشش است، شهرها نواحی مجزا از یکدیگر هستند. بنابراین مسأله به این صورت مطرح می‌شود: فرض کنید $\mathcal{S} = \{p_1, \dots, p_n\}$ مجموعه‌ای از n نقطه‌ی غیردقیق در \mathbb{R}^d و $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ مجموعه‌ای از n دایره در \mathbb{R}^d باشد، به طوری که هر یک از دایره‌ها مانند D_i متناظر با موقعیت‌های ممکن برای نقطه‌ی p_i است (برای $i = 1, 2, \dots, n$). آیا می‌توان گراف $G = (\mathcal{D}, \mathcal{E})$ را ساخت به گونه‌ای که گراف $G' = (\mathcal{S}, \mathcal{E})$ با مجموعه یال‌های $\mathcal{E} = \{(p_i, p_j) | (D_i, D_j) \in \mathcal{E}\}$ ، صرف‌نظر از محل قرار گرفتن هر نقطه در دایره متناظرش، یک t -پوشش باشد؟

مقاله‌ی [۲] ابتدا ساخت t -پوشش برای مجموعه نقاط غیردقیق را که توسط دایره‌هایی با شعاع یکسان مدل شده‌اند، بررسی می‌کند. ایده‌ی روش، ساخت یک $WSPD$ با پارامتر $s' = 8\left(\frac{t+1}{t-1}\right) + 2$ ، روی مجموعه‌ی مراکز دایره‌ها است. سپس تبدیل این $WSPD$ ، به یک $WSPD$ برای مجموعه نقاط غیردقیق با پارامتر $s = 4\left(\frac{t+1}{t-1}\right)$ ؛ به این صورت که به ازای هر زوج (A, B) متعلق به $WSPD$ مربوط به مراکز دایره‌ها، زوج متناظر آن در $WSPD$ مربوط به نقاط غیردقیق به صورت (A', B') است، که $A' = \{p_i | c_i \in A\}$ و $B' = \{p_i | c_i \in B\}$ می‌باشد. در نهایت با استفاده از $WSPD$ با پارامتر s روی مجموعه نقاط غیردقیق، یک t -پوشش برای نقاط به دست می‌آید (جزئیات و اثبات در فصل ۹ کتاب [۲۰] آمده است). اما برای حالتی که شعاع دایره‌هایی که نقاط را مدل می‌کنند، متفاوت باشد، دیگر نمی‌توان به راحتی $WSPD$ مربوط به مراکز دایره‌ها را به یک $WSPD$ برای نقاط غیردقیق تبدیل کرد، بنابراین باید از یک روش قوی‌تر استفاده کرد که استفاده از $SSPD$ ‌ها یک راه حل است. در ادامه چگونگی ساخت یک t -پوشش برای مجموعه نقاط غیردقیق که توسط دایره‌هایی با شعاع‌های متفاوت و دلخواه مدل شده‌اند، بررسی می‌شود.

۱.۲.۴ ساخت $SSPD$ برای مجموعه نقاط غیردقیق

مجموعه نقاط غیردقیق $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ در \mathbb{R}^d که توسط دایره‌های $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ (گوی‌های d بعدی)، با شعاع‌های دلخواه، مدل شده‌اند، را در نظر بگیرید. متناظر با هر نقطه مانند $p_i \in P$ دایره‌ی $D_i = (c_i, r_i)$ به مرکز c_i و شعاع r_i وجود دارد. برای ساخت یک t -پوشش برای مجموعه نقاط P ابتدا یک $SSPD$ روی مجموعه‌ی c_1, \dots, c_n (مراکز دایره‌های مجموعه‌ی \mathcal{D}) ساخته می‌شود، سپس با

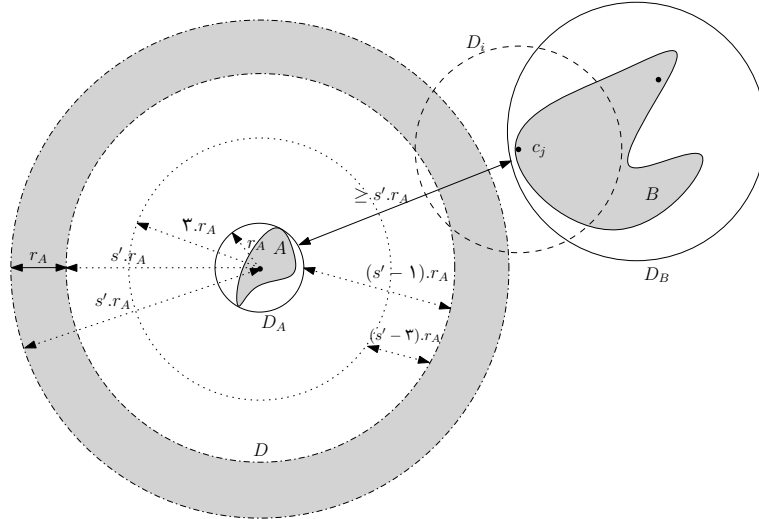
استفاده از این $SSPD$ ، یک $SSPD$ روی مجموعه نقاط P ساخته شده و در نهایت t -پوشش با استفاده از $SSPD$ ساخته شده روی نقاط غیردقیق، حاصل می‌شود. لم ۱.۲.۴ بیانگر این نکته است که می‌توان $SSPD$ روی مراکز دایره‌ها (مجموعه نقاط c_1, \dots, c_n)، را به یک $SSPD$ برای مجموعه نقاط P تبدیل کرد.

لم ۱.۲.۴ فرض کنید $\{(A_i, B_i) | 1 \leq i \leq m\}$ $SSPD$ ساخته شده با پارامتر $s' = 3s + 3$ ، برای مجموعه $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ از مراکز دایره‌های مدل کننده‌ی نقاط غیردقیق باشد. همچنین فرض کنید مجموعه‌ی $\mathcal{S} = \{p_1, \dots, p_n\}$ از نقاط غیردقیق باشد به طوری که هر نقطه‌ی p_j ، $j = 1, \dots, n$ ، توسط دایره‌ی D_j مدل شده است. به ازای $1 \leq i \leq m$ ، قرار دهید: $A'_i = \{p_j | c_j \in A_i\}$ و $B'_i = \{p_j | c_j \in B_i\}$. آنگاه تجزیه زوج $\{(A'_i, B'_i) | 1 \leq i \leq m\}$ یک $SSPD$ برای مجموعه نقاط \mathcal{S} ، با پارامتر s است.

اثبات. فرض کنید (A, B) یک زوج نیم مجزا با پارامتر s' در $SSPD$ ساخته شده روی مجموعه نقاط \mathcal{C} است. همچنین فرض کنید A' و B' مجموعه‌ی شامل نقاط $p_j \in D_j$ متناظر با نقاط $c_j \in A$ و $c_j \in B$ باشد. از آنجا که (A, B) زوج نیم مجزا با پارامتر s' است، بنابراین دو دایره‌ی D_A و D_B ، به ترتیب شامل نقاط A و B وجود دارد به طوری که $d(D_A, D_B) \geq s' \cdot \min(r_A, r_B)$ است ($r_A = \text{radius}(D_A)$ و $r_B = \text{radius}(D_B)$ می‌باشد). بدون از دست رفتن کلیت مسأله، فرض کنید $r_A \leq r_B$ باشد. دو حالت در نظر گرفته می‌شود:

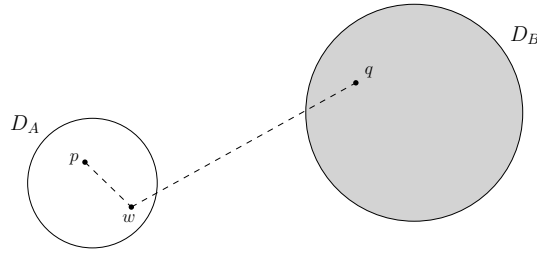
حالت اول: اگر برای یک مقدار $1 \leq j \leq n$ به طوری که $c_j \in A$ ، رابطه‌ی $\text{radius}(D_j) \geq 2r_A$ برقرار باشد، آنگاه با توجه به فرض مسأله که دایره‌ها مجزا هستند، می‌توان نتیجه گرفت مجموعه‌ی A و در نتیجه مجموعه‌ی A' تک نقطه‌ای هستند و از آنجا که یک تک نقطه با هر مجموعه‌ای از نقاط، یک زوج نیم مجزا با پارامتر دلخواه می‌سازد، بنابراین زوج (A', B') یک زوج نیم مجزا با پارامتر s' است.

حالت دوم: فرض کنید برای هر نقطه‌ی $c_j \in A$ رابطه‌ی $\text{radius}(D_j) < 2r_A$ برقرار باشد، بنابراین هر نقطه‌ی p_j ، متناظر با دایره‌ی D_j به مرکز $c_j \in A$ ، در دایره‌ای هم مرکز با دایره‌ی D_A و با شعاع $3r_A$ قرار می‌گیرد، شکل ۳.۴ را ببینید. فرض کنید D دایره‌ی هم مرکز با دایره‌ی D_A و با شعاع $s'r_A$ باشد. طبق لم بسته‌بندی (فصل یک، لم ۴.۵.۱)، تعداد نقاط $c_j \in B$ ، که دایره‌ی متناظر



شکل ۳.۴: مربوط به اثبات لم ۱.۲.۴

با آن دارای شعاع بزرگتر از r_A است و با دایره‌ی D اشتراک دارد، برابر با $\mathcal{O}(d^{d/2} s^{d-1})$ است. برای هر یک از این چنین نقاط c_j ، زوج (A', B') ، به زوج‌های $(A', \{p_j\})$ ، تبدیل می‌شود. واضح است که زوج $(A', \{p_j\})$ ، یک زوج نیم مجزا با پارامتر s است. سایر نقاط $p_j \in B'$ ، متناظر با نقاط $c_j \in B$ که دایره‌ی D_j با دایره‌ی D اشتراک ندارد، با مجموعه نقاط A' تشکیل یک زوج نیم مجزا با پارامتر s می‌دهند؛ زیرا فاصله‌ی هر یک از این p_j ها از دایره‌ی D_A حداقل $(s' - 1).r_A$ است و در نتیجه فاصله‌ی این نقاط از نقاط داخل دایره به شعاع $3.r_A$ (نقاط داخل مجموعه‌ی A')، حداقل برابر با $(s' - 3).r_A$ است؛ با توجه به این‌که $(s' - 3).r_A = 3.s.r_A$ و $3.s.r_A > s.r_A$ است، بنابراین نیم مجزا بودن این مجموعه از نقاط، و مجموعه نقاط A' ، واضح است. در نتیجه هر زوج (A', B') با $\mathcal{O}(s^d)$ (تعداد ثابت) زوج نیم مجزا با پارامتر s ، جایگزین می‌شود. در مورد وزن $SSPD$ ، می‌توان گفت از آنجا که وزن $SSPD$ ساخته شده روی مجموعه نقاط C حداکثر $\mathcal{O}(ns^d \log n)$ است، و هر زوج (A, B) با $\mathcal{O}(s^d)$ زوج، هر یک دارای وزنی حداکثر برابر با $\mathcal{O}(|A| + |B|)$ ، جایگزین می‌شود، بنابراین وزن $SSPD$ ساخته شده روی مجموعه نقاط P ، حداکثر $\mathcal{O}(ns^{2d} \log n)$ می‌باشد. \square



شکل ۴.۴: دایره‌های D_A و D_B متناظر با مجموعه نقاط A و B و یال‌های اضافه شده به گراف.

۲.۲.۴ ساخت t -پوشش با استفاده از $SSPD$ برای نقاط غیردقیق

ساخت پوشش به این صورت است که با توجه به لم ۱.۲.۴، یک $SSPD$ با نام S ، با پارامتر $s = 4/(t-1)$ برای مجموعه نقاط غیردقیق P ، ساخته می‌شود، سپس به ازای هر زوج مانند (A, B) در این $SSPD$ ، نقطه‌ای دلخواه مانند p از مجموعه‌ی کوچک‌تر (فرض کنید D_A دارای شعاع کمتری است)، انتخاب شده و p به تمام نقاط در $A \cup B$ متصل می‌شود. بنابراین تعداد یال‌های t -پوشش، حداکثر $\sum_{(A,B) \in S} (|A| + |B|)$ است، که این تعداد از مرتبه‌ی وزن $SSPD$ بوده و برابر با $\mathcal{O}(n \log n)$ می‌باشد. حال ادعا می‌شود که مجموعه یال‌های اضافه، یک t -پوشش روی مجموعه نقاط P می‌سازد. برای اثبات این ادعا باید ثابت شود به ازای هر دو نقطه‌ی دلخواه مانند $p, q \in P$ ، یک t -مسیر در گراف ایجاد شده وجود دارد. فرض کنید (A, B) زوجی در S باشد که $p \in A$ و $q \in B$ (یا بر عکس). همچنین فرض کنید $\text{radius}(D_A) \leq \text{radius}(D_B)$ باشد. با توجه به نحوه‌ی اضافه شدن یال‌ها که در بالا گفته شد، نقطه‌ای مانند $w \in A$ وجود دارد که هم به p و هم به q متصل شده است (توجه کنید w می‌تواند نقطه‌ی p باشد). شکل ۴.۴ را ببینید. بنابراین طول مسیر بین نقطه‌ی p و q در گراف، حداکثر $\|pw\| + \|wq\|$ می‌باشد که با استفاده از نامساوی مثلثی، با رابطه‌ی زیر کراندار می‌شود:

$$\|pw\| + \|wq\| \leq 2\|pw\| + \|pq\| \leq 4 \text{radius}(D_A) + \|pq\| \leq (t-1)\|pq\| + \|pq\|. \quad (۶-۴)$$

نامساوی آخر با توجه به روابط $\text{radius}(D_A) \leq d(D_A, D_B)$ ، $s \cdot \text{radius}(D_A) \leq \|pq\|$ و $d(D_A, D_B) \leq \|pq\|$ برقرار است. بنابراین از رابطه‌ی ۴-۶ نتیجه می‌شود $\|pw\| + \|wq\| \leq t\|pq\|$ بوده و در نتیجه یک t -مسیر بین دو نقطه‌ی p و q وجود دارد و به این ترتیب ادعا ثابت می‌شود.

نتیجه ۲.۲.۴ برای هر مجموعه‌ی P از n نقطه‌ی غیردقیق در \mathbb{R}^d ، که توسط دایره‌های دو به دو مجزا از

یکدیگر، مدل شده‌اند، و به ازای هر $t > 1$ ، یک t -پوشش با $O(n \log n / (t-1)^{2d})$ یال وجود دارد که در زمانی متناسب با وزن $SSPD$ ساخته شده روی مجموعه نقاط P ، یعنی در زمان $O(n \log n / (t-1)^{2d})$ قابل ساخت است.

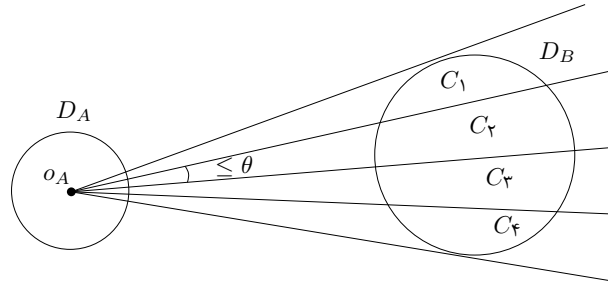
۳.۴ ساخت t -پوشش برای نقاط، با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های

محدب

یک کاربرد مهم دیگر برای $SSPD$ ‌ها، ساخت پوشش‌های هندسی برای نقاط در صفحه، با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های محدب^{۱۱} است. توضیحات بیشتر در مورد این پوشش‌ها را در فصل یک، زیر بخش ۳.۴.۱ ببینید. ایده‌ی این روش به این صورت است که با استفاده از مخروط‌های کانونی (توضیحات مربوط به مخروط‌های کانونی در بخش ۱.۴ آمده است)، به ازای هر زوج^{۱۲} در $SSPD$ ، تعدادی یال به پوشش اضافه می‌شود. مجموعه نقاط P در صفحه، و δ ، به عنوان یک $SSPD$ ساخته شده برای P ، داده شده است. زوج $(A, B) \in \delta$ را در نظر بگیرید؛ بنابراین دو دایره‌ی D_A و D_B شامل مجموعه نقاط A و B وجود دارند به طوری که فاصله‌ی بین این دو دایره، بزرگ‌تر از s برابر مینیمم شعاع دو دایره‌ی D_A و D_B است. بدون از دست رفتن کلیت مسأله، فرض کنید شعاع D_A کوچک‌تر از شعاع D_B است و o_A نشان دهنده‌ی مرکز دایره‌ی D_A باشد. به ازای زوج (A, B) ، یال‌هایی به صورت زیر به پوشش اضافه می‌شوند: ابتدا صفحه به $k = \lceil 2\pi/\theta \rceil$ مخروط C_1, C_2, \dots, C_k ، که مرکز همه‌ی آن‌ها o_A ، و زاویه‌ی داخلی رأس حداکثر θ است، افراز می‌شود، (در ادامه روی مقدار مناسب برای θ ، بحث می‌شود)، شکل ۵.۴ را ببینید. قرار دهید $B^{(i)} = C_i \cup B$ ، که $B^{(i)}$ نشان دهنده‌ی مجموعه نقاط B داخل مخروط C_i می‌باشد. در این‌جا فرض گرفته می‌شود که در مرز مشترک مخروط‌ها، هیچ نقطه‌ای وجود ندارد. برای هر $B^{(i)}$ ، مجموعه نقاط داخل $B^{(i)}$ به ترتیب فاصله‌ی صعودیشان از o_A مرتب می‌شوند؛ فرض کنید $q_1, q_2, \dots \in B^{(i)}$ لیست نقاط مرتب شده به ترتیب فاصله از o_A باشد؛ با شروع از نقطه‌ی q_1 به ترتیب نقاط پردازش می‌شوند. در واقع، به ازای هر نقطه مانند q_j در این لیست، عملیاتی به این صورت انجام می‌شود: فرض کنید $CH(A')$

^{۱۱} C-Fault Tolerant Spanners

^{۱۲} Pair



شکل ۵.۴: مخروط‌های کانونی با زاویه θ و مرکز o_A

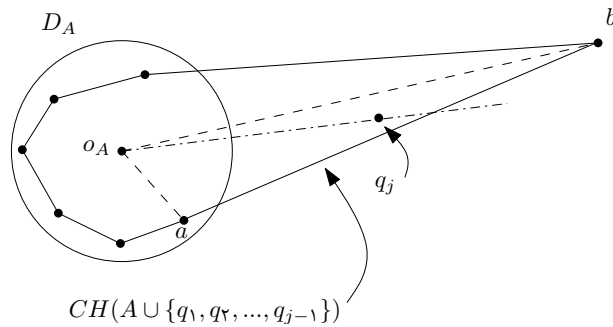
غشای محدب برای مجموعه نقاط $A' = A \cup \{q_1, q_2, \dots, q_{j-1}\}$ است؛ تمامی یال‌های بین q_j و نقاطی از مجموعه A که این نقاط روی غشای محدب $CH(A')$ قرار می‌گیرند، با این شرط که یال‌ها $CH(A')$ را قطع نکنند، به پوشش اضافه می‌شود. سپس $CH(A')$ با اضافه کردن نقطه‌ی q_j به آن، به روز رسانی می‌شود و به این ترتیب نقاط موجود در لیست، به ترتیب فاصله از o_A ، پردازش می‌شوند. پس از پایان پردازش تمام نقاط داخل $B^{(i)}$ ، مجموعه یال‌های $E(A, B^{(i)})$ حاصل می‌شود. بنابراین به ازای زوج (A, B) می‌توان مجموعه یال‌های اضافه شده به پوشش را با $E(A, B) = \bigcup_{1 \leq i \leq k} E(A, B^{(i)})$ نشان داد، که $k = \lceil 2\pi/\theta \rceil$ تعداد مخروط‌های با رأس o_A و زاویه‌ی حداکثر θ می‌باشد.

در اینجا سوالی مطرح می‌شود که تعداد کل یال‌های اضافه شده به پوشش، چقدر است؟ برای پاسخ به این سوال، لم ۱.۳.۴ کرانی را برای تعداد یال‌های اضافه شده به پوشش، به ازای هر زوج (A, B) معین می‌کند.

$$\text{لم ۱.۳.۴} \quad |E(A, B)| = \mathcal{O}(|A|/\theta + |B|)$$

اثبات. با توجه به نحوه‌ی ساخت، یال‌های $E(A, B^{(i)})$ که به پوشش اضافه می‌شوند، با یکدیگر برخورد ندارند؛ در نتیجه $E(A, B^{(i)})$ تشکیل یک مجموعه‌ی مسطح از یال‌ها را می‌دهند. از آنجا که تعداد یال‌ها در گراف مسطح با n رأس، از مرتبه‌ی $\mathcal{O}(n)$ است (بخش ۸.۴ از مرجع [۷])، بنابراین تعداد یال‌های $|E(A, B^{(i)})|$ برابر با $\mathcal{O}(|A| + |B^{(i)}|)$ می‌باشد؛ از طرفی تعداد مجموعه‌های $B^{(i)}$ از مرتبه‌ی $\mathcal{O}(1/\theta)$ و $\sum |B^{(i)}| = |B|$ است. در نتیجه $|E(A, B)| = (1/\theta) * \mathcal{O}(|A| + |B^{(i)}|) = \mathcal{O}(|A|/\theta + |B|)$ می‌باشد. \square

برای نشان دادن این که گراف حاصل شده از اضافه کردن مجموعه یال‌های $E(A, B)$ یک t -پوشش با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های محدب است، ابتدا یک مشاهده و سپس یک لم، اثبات می‌شوند که از هر دوی آن‌ها، برای اثبات درستی الگوریتم استفاده می‌شود.

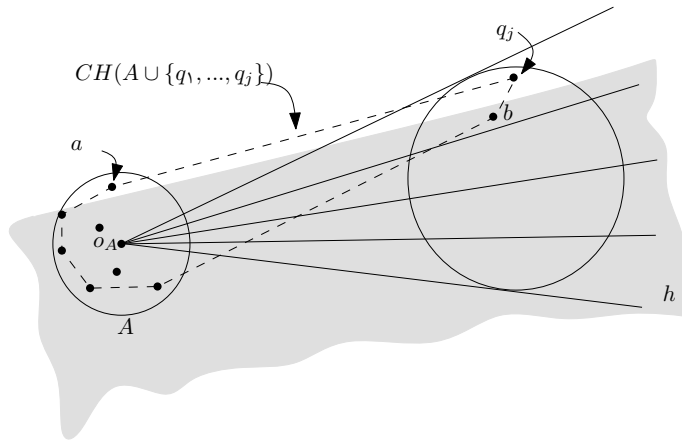


شکل ۶.۴: مربوط به مشاهده‌ی ۲.۳.۴

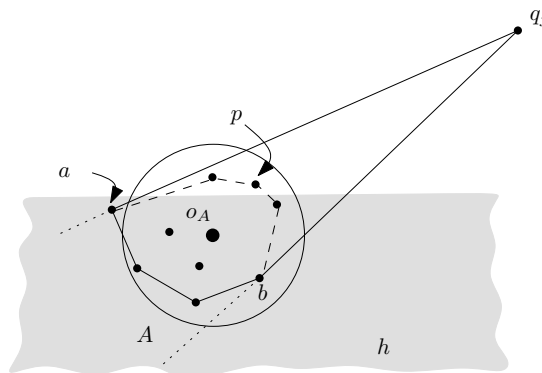
مشاهده ۲.۳.۴ هر نقطه مانند q_j در لیست مرتب شده‌ی نقاط داخل $B^{(i)}$ ، خارج از غشای محدب مجموعه‌ی $A' = A \cup \{q_1, q_2, \dots, q_{j-1}\}$ قرار می‌گیرد.

اثبات. برای اثبات، از فرض خلف استفاده می‌شود؛ فرض کنید نقطه‌ی q_j داخل $CH(A')$ باشد. آنگاه اشعه‌ی تابیده شده از نقطه‌ی o_A به نقطه‌ی q_j حتماً یالی از $CH(A')$ را قطع می‌کند، شکل ۶.۴ را ببینید. فرض کنید نقاط a و b ، دو نقطه‌ی انتهایی این یال باشند. واضح است که q_j داخل مثلث $\triangle oab$ قرار می‌گیرد. از طرفی چون دو نقطه‌ی a و b ، قبل از پردازش q_j وجود داشته‌اند، بنابراین $a, b \in A \cup \{q_1, q_2, \dots, q_{j-1}\}$ بوده و فاصله‌ی آن‌ها تا o_A ، در مقایسه با فاصله‌ی q_j تا o_A کمتر است. به عبارتی داریم: $d(o_A, a) \leq d(o_A, q_j)$ و $d(o_A, b) \leq d(o_A, q_j)$ ، که این دو نامساوی با این گفته که q_j داخل مثلث $\triangle oab$ است، در تناقض می‌باشد. به این ترتیب اثبات می‌شود نقطه‌ی در حال پردازش q_j حتماً خارج از $CH(A')$ قرار می‌گیرد. \square

لم ۳.۳.۴ فرض کنید h یک نیم‌صفحه‌ی شکست است، به طوری که به ازای یک مقدار خاص i ، هر یک از مجموعه نقاط A و $B^{(i)}$ شامل یک نقطه خارج از h هستند؛ همچنین فرض کنید از بین تمام نقاط



الف: یکی از نقاط a یا b بیرون از h هستند



ب: هر دو نقطه a و b داخل h هستند

شکل ۷.۴: مربوط به اثبات لم ۳.۳.۴

داخل $B^{(i)}$ و خارج از نیم‌صفحه‌ی h ، نقطه‌ی q_j نزدیک‌ترین نقطه به o_A باشد؛ آنگاه یالی در $E(A, B)$ وجود دارد که q_j را به نقطه‌ای مانند $p \in A$ که خارج از h است، متصل می‌کند.

اثبات. طبق فرض، نقطه‌ی q_j نزدیک‌ترین نقطه به o_A است که خارج از h قرار می‌گیرد و نقاط q_1, q_2, \dots, q_{j-1} داخل نیم‌صفحه‌ی h هستند. با توجه به مشاهده‌ی ۲.۳.۴، q_j خارج از غشای محدب مجموعه نقاط $A \cup \{q_1, q_2, \dots, q_{j-1}\}$ قرار می‌گیرد و بنابراین واضح است که q_j نقطه‌ای روی غشای محدب مجموعه نقاط $A \cup \{q_1, q_2, \dots, q_j\}$ است. فرض کنید نقاط a و b ، همسایه‌های q_j روی غشای محدب $CH(A \cup \{q_1, q_2, \dots, q_j\})$ باشند؛ حال دو حالت در نظر گرفته می‌شود:

حالت اول: نقطه‌ی a یا b بیرون از نیم‌صفحه‌ی h قرار بگیرند؛ شکل ۷.۴ قسمت (الف) را ببینید. در این حالت حتماً نقطه‌ای که بیرون از h است، متعلق به مجموعه نقاط A بوده و یال رسم شده بین q_j و

آن نقطه، یال مطلوب است که خارج از نیم‌صفحه‌ی h قرار می‌گیرد.

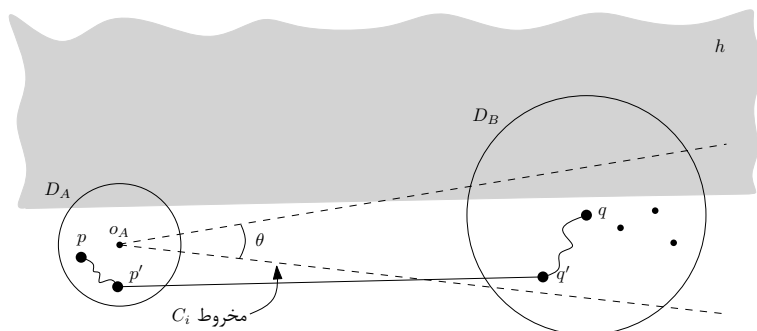
حالت دوم: هر دو نقطه‌ی a و b داخل نیم‌صفحه‌ی h قرار گیرد؛ شکل ۷.۴ قسمت (ب) را ببینید. اگر امتداد یال‌های (q_j, a) و (q_j, b) در نظر گرفته شود، آنگاه مخروط با رأس q_j ، شامل همه‌ی نقاط $A \cup \{q_1, q_2, \dots, q_{j-1}\}$ می‌باشد. از طرفی طبق فرض لم، حداقل یک نقطه از مجموعه‌ی A خارج از نیم‌صفحه‌ی h وجود دارد؛ از آنجا که تمام نقاط $\{q_1, q_2, \dots, q_{j-1}\}$ داخل h هستند، بنابراین لزوماً یک نقطه مانند $p \in A$ که خارج از h است، روی غشای محدب مجموعه نقاط $A \cup \{q_1, q_2, \dots, q_{j-1}\}$ قرار می‌گیرد. همان‌گونه که در شکل نیز مشخص است، تمام نقاط مانند نقطه‌ی p که مابین نقاط a و b و روی غشای محدب $CH(A \cup \{q_1, q_2, \dots, q_{j-1}\})$ هستند، از نقطه‌ی q_j قابل رویت^{۱۳} می‌باشند؛ به عبارتی می‌توان بین q_j و آن نقاط یالی رسم کرد به گونه‌ای که آن یال‌ها، غشای محدب $CH(A \cup \{q_1, q_2, \dots, q_{j-1}\})$ را قطع نکند. در نتیجه یالی که نقطه‌ی q_j را به نقطه‌ی p وصل می‌کند و خارج از نیم‌صفحه‌ی h قرار دارد، وجود دارد. \square

اکنون می‌توان درستی الگوریتم را اثبات کرد و نشان داد که گراف $\mathcal{G}(P, E)$ ، با مجموعه رأس‌های $P \in \mathbb{R}^2$ و مجموعه یال‌های $E = \bigcup_{(A,B) \in \delta} E(A, B)$ ، $SSPD(\delta)$ ساخته شده روی مجموعه نقاط P ، یک t -پوشش با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های محدب است. لم ۴.۳.۴ این هدف را دنبال می‌کند. لازم به ذکر است که δ یک $SSPD$ دارای خاصیت یکنواختی، است، برای توضیحات بیشتر در مورد خاصیت یکنواختی، زیربخش ۵.۱.۲ را ببینید.

لم ۴.۳.۴ فرض کنید δ یک $SSPD$ دارای خاصیت یکنواختی، برای مجموعه نقاط $P \in \mathbb{R}^2$ است؛ اگر ثابت تفکیک (پارامتر)، برای δ به صورت $s = \frac{3t+1}{\alpha t - 1}$ ، که $\alpha = \cos \theta - \sin \theta > 1/t$ ، در نظر گرفته شود، آنگاه گراف \mathcal{G} ، یک t -پوشش با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های نیم‌صفحه‌ای، و در نتیجه با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های محدب است.

اثبات. نیم‌صفحه‌ی دلخواه h را در نظر بگیرید؛ برای اثبات لم باید نشان داد که به ازای هر زوج از نقاط مانند $p, q \in P$ که بیرون از h قرار می‌گیرند، یک t -مسیر بین این دو نقطه در گراف $\mathcal{G} \ominus h$

^{۱۳}Visible



شکل ۸.۴: مربوط به اثبات لم ۳.۳.۴

وجود دارد. یادآوری می‌شود $\mathcal{G} \ominus h$ گرافی است که با حذف همه‌ی گره‌ها و یال‌های متعلق به \mathcal{G} که در نیم‌صفحه‌ی h قرار دارند، به دست می‌آید. طبق تعریف $SSPD$ زوجی نیم مجزا مانند $(A, B) \in \delta$ وجود دارد به طوری که $p \in A$ و $q \in B$ (با برعکس) است. اثبات با استقرا روی بیش‌ترین وزن (بیش‌ترین تعداد نقاط) دو مجموعه‌ی A و B انجام می‌شود:

پایه‌ی استقرا: بیش‌ترین وزن مجموعه‌های A و B برابر با یک باشد؛ بنابراین هر دو مجموعه، تک‌عضوی هستند و با توجه به روش ساخت t -پوشش که در بخش ۳.۴ مطرح شد، $E(A, B)$ (مجموعه یال‌های اضافه شده به پوشش به ازای زوج (A, B))، تنها شامل یال متصل‌کننده‌ی دو نقطه‌ی p و q می‌باشد؛ پس بین p و q یک یال و در نتیجه یک t -مسیر وجود دارد.

فرض استقرا: فرض کنید $k > 1$ و لم برای همه‌ی نقاط در زوج‌هایی که وزن آن‌ها کم‌تر از k است، برقرار باشد.

گام استقرا: فرض کنید بیش‌ترین وزن مجموعه نقاط A و B ، برابر با k باشد. باید ثابت شود که یک t -مسیر بین نقاط p و q وجود دارد.

برای اثبات فرض کنید D_A و D_B ، به ترتیب دایره‌های شامل نقاط مجموعه‌های A و B باشند؛ با توجه به نیم مجزا بودن زوج (A, B) ، رابطه‌ی $d(D_A, D_B) \geq s \cdot \min(\text{radius}(D_A), \text{radius}(D_B))$ برقرار است. بدون از دست رفتن کلیت مسأله، فرض کنید $r = \text{radius}(D_A) \leq \text{radius}(D_B)$ است؛ همچنین $o = o_A$ نشان دهنده‌ی مرکز دایره‌ی D_A است. فرض کنید C_i مخروطی با رأس o است که شامل نقطه‌ی q می‌باشد و q' نقطه‌ای در $B^{(i)} \setminus h$ است که به مرکز o نزدیک‌تر است، شکل ۸.۴ را ببینید. از آنجا که q' خارج از نیم‌صفحه‌ی h است، بنابراین طبق لم ۳.۳.۴، یالی بین q' و نقطه‌ی

$p' \in A$ خارج از h وجود دارد. با توجه به خاصیت یکنواختی δ (زیر بخش ۵.۱.۲ از فصل دو)، و فرض استقرا، یک t -مسیر بین نقاط p و p' ، و یک t -مسیر بین نقاط q و q' در گراف $\mathcal{G} \ominus h$ وجود دارد؛ با اتصال این مسیرها و با استفاده از یال (p', q') ، مسیر Π در $\mathcal{G} \ominus h$ به دست می‌آید. پس کافی است ثابت شود Π یک t -مسیر بین نقاط p و q است. برای اثبات مثلث $\Delta oqq'$ را در نظر بگیرید، شکل ۸.۴ را ببینید. از آنجا که $\angle qoq' \leq \theta$ است، با توجه به لم ۴.۱.۴ که در کتاب [۲۰] آمده است، می‌توان گفت:

$$d(q, q') \leq d(o, q) - (\cos \theta - \sin \theta).d(o, q')$$

لذا طول مسیر Π که با $length(\Pi)$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر کراندار می‌شود:

$$\begin{aligned} length(\Pi) &= d(p, p') + d(p', q') + d(q', q) \\ &\leq t.d(p, p') + d(p', q') + t.d(q, q') \\ &\leq 2rt + (r + d(o, q')) + t(d(o, q) - (\cos \theta - \sin \theta).d(o, q')) \\ &= 2rt + (r + d(o, q')) + t(d(o, q) - r) + tr - t\alpha.d(o, q') \\ &\leq 3rt + (r + d(o, q')) + t.d(p, q) - t\alpha.d(o, q') \\ &= t.d(p, q) + r(3t + 1) + (1 - t\alpha).d(o, q'). \end{aligned} \quad (7-4)$$

از آنجا که $d(D_A, D_B) \geq s.r$ ، بنابراین می‌توان گفت:

$$d(o, q') \geq d(D_A, D_B) \geq s.r \quad (8-4)$$

با جایگذاری رابطه‌ی ۸-۴ در قسمت آخر رابطه‌ی (۷-۴) داریم:

$$length(\Pi) \leq t.d(p, q) + r(3t + 1) + s.r.(1 - t\alpha). \quad (9-4)$$

با جایگذاری مقدار ثابت تفکیک $s = \frac{3t + 1}{\alpha t - 1}$ ، در رابطه‌ی ۹-۴ داریم:

$$\begin{aligned} length(\Pi) &\leq t.d(p, q) + r(3t + 1) + r.\frac{3t + 1}{\alpha t - 1}(1 - t\alpha) \\ &= t.d(p, q) + r.\frac{3t + 1}{\alpha t - 1}((\alpha t - 1) + (1 - \alpha t)) \\ &= t.d(p, q). \end{aligned}$$

بنابراین Π یک t -مسیر بین نقاط p و q است و لم ثابت می‌شود. \square

توجه کنید با قرار دادن $t = 1 + \varepsilon$ ، به ازای مقدار مثبت و کوچک $1 > \varepsilon > 0$ ، می‌توان یک t -پوشش مطلوب را با ضریب کشش نسبتاً کوچک، به دست آورد. اگر زاویه‌ی $0 < \theta < 1$ باشد، رابطه‌ی $\cos \theta - \sin \theta > 1 - \theta - \theta^2/2$ برقرار است؛ بنابراین با قرار دادن $\theta = \varepsilon/4$ داریم:

$$\cos \theta - \sin \theta > 1 - \theta - \theta^2/2 > 1 - 2\theta = 1 - \varepsilon/2.$$

با توجه به لم ۴.۳.۴، با قرار دادن پارامتر s به صورت:

$$s = \frac{3t + 1}{(\cos \theta - \sin \theta)t - 1} < \frac{6}{(1 - \varepsilon/2)(1 + \varepsilon) - 1} < 24/\varepsilon$$

یک $(1 + \varepsilon)$ -پوشش، حاصل می‌شود؛ در نتیجه برای مجموعه‌ی P شامل n نقطه، در فضای \mathbb{R}^2 ، و به ازای هر مقدار $1 > \varepsilon > 0$ ، یک $(1 + \varepsilon)$ -پوشش با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های محدب وجود دارد که تعداد یال‌های این پوشش $\mathcal{O}((n/\varepsilon^3) \log n)$ است؛ برای اثبات ادعای مربوط به تعداد یال‌ها، می‌توان گفت طبق لم ۱.۳.۴ تعداد یال‌های اضافه شده به پوشش به ازای هر زوج (A, B) متعلق به $SSPD$ نقاط P حداکثر $\mathcal{O}(|A|/\theta + |B|)$ می‌باشد. همچنین با توجه به اینکه $SSPD$ ساخته شده با استفاده از روش مطرح شده در بخش ۲.۱.۲، دارای وزن $\mathcal{O}(s^2 n \log n)$ است، بنابراین تعداد یال‌های $(1 + \varepsilon)$ -پوشش ساخته شده به صورت زیر کراندار می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum_{(A,B) \in SSPD} |E(A, B)| &= \sum_{(A,B) \in SSPD} (|A|/\theta + |B|) \\ &\leq 1/\theta \sum_{(A,B) \in SSPD} (|A| + |B|) \\ &= \mathcal{O}(s^2 \cdot n \log n) \\ &= \mathcal{O}((1/\varepsilon^3) \cdot n \log n). \end{aligned}$$

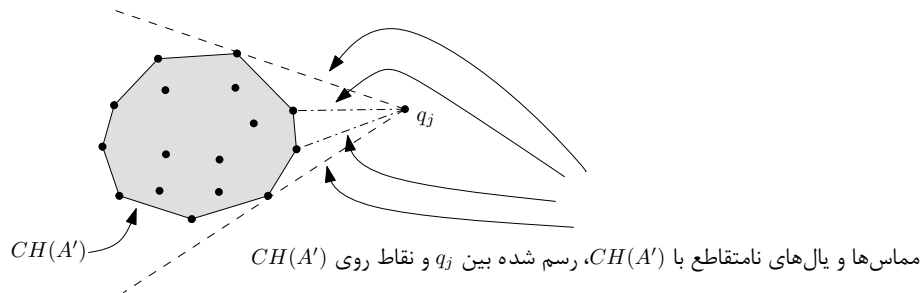
و به این ترتیب ادعا ثابت می‌شود.

تنها مسأله‌ی باقیمانده، بررسی زمان ساخت این گونه پوشش‌ها با استفاده از $SSPD$ است. لم ۵.۳.۴

این هدف را دنبال می‌کند:

لم ۵.۳.۴ مجموعه نقاط P شامل n نقطه در صفحه داده شده است؛ می توان در زمان $\mathcal{O}((n/\varepsilon^2) \log^2 n)$ یک $(1 + \varepsilon)$ -پوشش با قابلیت تحمل شکست ناحیه های محدب، با استفاده از $SSPD$ مربوط به نقاط P ساخت.

اثبات. زوج (A, B) در $SSPD$ ساخته شده را در نظر بگیرید؛ اولین گام الگوریتم، ایجاد مخروط های کانونی پیرامون مرکز دایره ای کوچک تر (فرض کنید دایره ای کوچک تر D_A باشد)، و تعیین مخروط شامل هر یک از نقاط مجموعه ای B است؛ از آنجا که مخروط های کانونی مانند شبکه ای هستند که در زمان ثابت می توان برای هر نقطه، مخروط در بر گیرنده ای آن را یافت (زیر بخش ۱.۴ را ببینید)، بنابراین گام اول در زمان $\mathcal{O}(|B|)$ ، قابل اجرا است.



شکل ۹.۴: یال های اضافه شده به پوشش به ازای نقطه ای q_j .

در گام دوم الگوریتم، ابتدا غشای محدب مجموعه ای A ، در زمان $\mathcal{O}(|A| \log |A|)$ محاسبه می شود (قضیه ۳.۱.۱)، سپس نقاط $B^{(i)}$ در هر یک از مخروط ها، به ترتیب فاصله از مرکز A مرتب می شوند؛ این کار در مجموع برای همه ی نقاط B در تمام مخروط ها در زمان $\mathcal{O}(|B| \log |B|)$ قابل اجرا است. به ازای هر نقطه ای $q_j \in B^{(i)}$ ، برای رسم یال های غیرمتقاطع^{۱۴} بین q_j و نقاط مجموعه ای A که روی $CH(A')$ قرار دارند، کافی است q_j به تمام نقاط متعلق به مجموعه ای A روی $CH(A')$ ، که بین خطوط مماس^{۱۵} $CH(A')$ و گذرنده از q_j قرار می گیرند، متصل شود، شکل ۹.۴ را ببینید؛ در نتیجه تعداد یال های رسم شده از q_j به نقاط A ، روی $CH(A')$ ، حداکثر $|A|$ است که هر یک از این یال ها در زمان ثابت قابل شناسایی و رسم است؛ در واقع با توجه به این که نقاط روی غشای محدب $CH(A')$ به ترتیب ساعت گرد از

^{۱۴}Noncrossing Edges

^{۱۵}Tangent Lines

چپ‌ترین نقطه، موجود هستند، می‌توان با حرکت از نقطه‌ی مماس بالایی به سمت نقطه‌ی مماس پایینی، در جهت ساعت‌گرد، نقاط بین دو مماس را شناسایی و یال‌های مورد نظر را رسم کرد. محاسبه‌ی مماس مشترک از q_j به $CH(A')$ در زمان $\mathcal{O}(\log |A'|) \in \mathcal{O}(\log n)$ انجام می‌شود (فصل یک، قضیه‌ی ۴.۱.۱ را ببینید)؛ بنابراین زمان لازم برای ایجاد مماس‌ها و رسم یال‌های پوشش، با در نظر گرفتن همه‌ی مخروط‌ها، حداکثر $\mathcal{O}(|E(A, B)| \log n)$ می‌باشد. مرحله‌ی بعدی به روز رسانی غشای محدب برای مجموعه نقاط $CH(A') \cup \{q_j\}$ است که طبق قضیه‌ی ۴.۱.۱، در زمان $\mathcal{O}(\log |A'|) \in \mathcal{O}(\log n)$ انجام می‌شود. در نهایت می‌توان زمان کل جهت پردازش زوج (A, B) و اضافه‌سازی یال‌ها به پوشش را، با رابطه‌ی زیر کراندار کرد:

$$\mathcal{O}(|B| + |A| \log |A| + |B| \log |B| + |E(A, B)| \log n + |B| \log(|A| + |B|)) \quad (۱۰-۴)$$

و به ازای تمام زوج‌های متعلق به $SSPD$ ، زمان ساخت پوشش با توجه به رابطه‌ی ۴-۱۰ برابر است با:

$$\begin{aligned} & \mathcal{O} \left(\sum_{(A,B) \in SSPD} \mathcal{O}(|B| + |A| \log |A| + |B| \log |B| + |E(A, B)| \log n + |B| \log(|A| + |B|)) \right) \\ & \leq \mathcal{O} \left(\sum_{(A,B) \in SSPD} ((|A| + |B|) \log n + |E(A, B)| \log n) \right) \\ & = \mathcal{O}(s^2 n \log^2 n + n \log^2 n) \\ & = \mathcal{O}(s^2 n \log^2 n). \end{aligned} \quad (۱۱-۴)$$

از آنجا که $SSPD$ برای هر مجموعه شامل n نقطه در صفحه، در زمان $\mathcal{O}(s^2 n + n \log n)$ قابل ساخت است (نتیجه‌ی ۸.۱.۲)، بنابراین زمان محاسبه شده برای ساخت پوشش با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های محدب، با استفاده از $SSPD$ نقاط، قابل توجیه است. با قرار دادن پارامتر s به صورت $s < 24/\varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1$)، زمان ساخت پوشش، به صورت $\mathcal{O}(n/\varepsilon^2 \log^2 n)$ به دست می‌آید و به این ترتیب لم اثبات می‌شود. \square

نتیجه ۶.۳.۴ برای مجموعه‌ی P شامل n نقطه در صفحه، و به ازای مقدار کوچک و مثبت ε ، یک $(1 + \varepsilon)$ -پوشش با قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های محدب، شامل $\mathcal{O}((n/\varepsilon^3) \log n)$ یال، در زمان

$\mathcal{O}(n/\varepsilon^2 \log^2 n)$ ، با استفاده از $SSPD$ مربوط به نقاط P ، که دارای پارامتر $s < 24/\varepsilon$ می‌باشد، قابل

ساخت است.

فصل ۵

نتیجه گیری

فرض کنید P مجموعه‌ای از n نقطه در فضای \mathbb{R}^d باشد. به منظور نمایشی فشرده، هر چند تقریبی از فواصل بین تمام زوج نقاط در P ، مفهوم تجزیه نقاط به زوج‌های کاملاً مجزا مطرح شد که دارای تعداد خطی زوج هستند. اما مجموعه نقاطی وجود دارند که تجزیه زوج‌های کاملاً مجزا برای آن‌ها دارای وزن بالایی (مربعی روی تعداد نقاط) است و این برای کاربردهایی که وزن تجزیه زوج روی کارایی نهایی تأثیر می‌گذارد، مطلوب نیست. برای حل این مشکل، شرط روی زوج‌های کاملاً مجزا محدودتر شد و تجزیه نقاط به زوج‌های نیم مجزا در سال ۱۹۹۸ توسط واداراجان معرفی شد.

هدف از این پایان‌نامه، بررسی روش‌های ساخت تجزیه نقاط به زوج‌های نیم مجزا و همچنین ارائه‌ی کاربردهایی برای آن است. در فصل دوم، روش ساختی برای نقاط در فضای دو بعدی آمده است. این روش برای هر مجموعه‌ی n نقطه‌ای در صفحه، تجزیه نقاط نیم مجزا نسبت به پارامتر s و با وزن $\mathcal{O}(s^2 \cdot n \log n)$ می‌سازد که تعداد زوج‌های آن $\mathcal{O}(s^2 \cdot n)$ است. در فصل سه، روش‌های ساخت تجزیه نقاط به زوج‌های نیم مجزا در فضای d بعدی بررسی شده است. روش دوم مطرح شده در فصل سه، نسبت به روش فصل دوم برتری دارد، زیرا علاوه بر این که قابل اجرا در بعد دوم و بعدهای بالاتر است، هر نقطه در آن در تعداد $\mathcal{O}(s^d \log n)$ از زوج‌ها ظاهر می‌شود، در حالی که روش فصل دو فقط برای نقاط داخل صفحه قابل اجرا بوده و ممکن است نقطه‌ای در تعداد $\mathcal{O}(n)$ زوج در تجزیه ظاهر شود.

تجزیه زوج‌های نیم مجزا، کاربردهایی در زمینه‌ی یافتن نزدیک‌ترین زوج در بین یک مجموعه از نقاط، و همچنین در زمینه‌ی ساخت پوشش‌های هندسی دارند. در فصل چهارم، کاربردهایی از تجزیه نقاط به زوج‌های نیم مجزا، برای ساخت پوشش‌های هندسی ارائه شده است. ساخت $(1 + \varepsilon)$ -پوشش هندسی برای مجموعه نقاط در فضای \mathbb{R}^d ، ساخت پوشش هندسی برای مجموعه نقاط غیر دقیق، و همچنین ساخت پوشش‌های هندسی که قابلیت تحمل شکست ناحیه‌های محدب را دارند، برای نقاط در صفحه، کاربردهایی است که بررسی شده‌اند.

مسائلی پیرامون این موضوع که می‌تواند در کارهای تحقیقاتی آینده مورد بررسی قرار گیرد:

- کاربردهای دیگر حلقه‌های تفکیک کننده (مطرح شده در فصل ۳) چیست؟

- ارائه‌ی الگوریتمی با زمان قطعی^۱ برای ساخت SSPD ها، به گونه‌ای هر نقطه در تعداد کمی از

^۱Deterministic

زوجها (حداکثر $O(\log n)$ زوج) ظاهر شود.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الف

Hyper Plane	ابرصفحه
Packing Argument	استدلال بسته‌بندی
Ray	اشعه
Size	اندازه

ب

Normal Vector	بردار نرمال
Closure	بستار
Canonical Cut	برش کانونی
Doubling Dimension	بُعد مضاعف
Bounded Doubling Dimension	بُعد مضاعف کراندار

پ

Parent	پدر-والد
Spread	پراکندگی
Flag	پرچم
Spanner	پوشش
Regions-Fault Tolerant Geometric	پوشش‌های هندسی با قابلیت تحمل شکست نواحی
Spanners	

ت

Dilation	تأخیر
Pair Decomposition	تجزیه زوج
Well Separated Pair Decomposition(WSPD)	تجزیه زوج کاملاً مجزا
Semi Separated Pair Decomposition(SSPD)	تجزیه زوج نیم مجزا
Minimum Cost Perfect Matching	تطابق کامل با کم‌ترین هزینه
One-Cut	تک برش
One-Cutable	تک برش پذیر
Random	تصادفی

ث

Separation Constant	ثابت تفکیک
---------------------	------------

چ

Polynomial چندجمله‌ای

ح

Ring حلقه

Separating Ring حلقه‌ی تفکیک کننده

خ

Tangent Lines خطوط مماس

د

Degree درجه

Quad-Tree درخت چهارتایی

Partial Quadtree درخت چهارتایی جزئی

Binary Space Partition Tree درخت دودویی افراز کننده‌ی فضا

Bounded Aspect Ratio(BAR)-Tree درخت نسبت کراندار

Hashing درهم‌سازی

Two-Cut دو برش

Two-Cuttable دو برش پذیر

ر

Quadrant ربع

ز

Pair زوج

Long Pair زوج طویل

Short Pair زوج کوتاه

Well Separated Pair of point set زوج مجموعه نقاط کاملاً مجزا

Semi Separated Pair of point set زوج مجموعه نقاط نیم مجزا

Unorderd Pair زوج نامرتب

س

Active levels سطوح فعال

ش

Grid	شبکه
Gridding	شبکه‌بندی
Geometric Network	شبکه‌ی هندسی
Pierce	شکافتن
Split	شکاف دادن
Canonical Slope	شیب کانونی

ص

Integer	صحیح
---------	------

ض

Interaction Product	ضرب متقابل
Stretch Factor	ضریب کشش

غ

Convex Hull	غشای محدب
-------------	-----------

ف

Child	فرزند
Metric Space	فضای متریک

ق

Visible	قابل رویت
Region Fault Tolerant	قابلیت تحمل شکست ناحیه‌ای
Hub	قطب
Diameter of Point Set	قطر مجموعه نقاط

ک

Well Separated	کاملاً مجزا
Minimum Enclosing Disk	کوچک‌ترین دیسک در بر گیرنده

گ

Complete k-Partite Graphs	گراف k -بخشی کامل
Ball	گوی

م

Metric	متر
Convex	محدب
Cone	مخروط

Canonical Cone مخروط کانونی
Path مسیر

ن

Canonical Region ناحیه‌ی کانونی
Skinny Region ناحیه‌ی لاغر
Aspect Ratio نرخ نسبیت
Closest Pair نزدیک‌ترین زوج
Nearest Neighbor نزدیک‌ترین همسایه
Imprecise Points نقاط غیر دقیق
Fat Regions نواحی چاق
Fault Regions نواحی شکست
Half-Space نیم فضا
Semi Separated نیم مجزا

و

Weight وزن

ی

Monotonicity یکنواختی
Noncrossing Edges یال‌های غیرمقاطع

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

- Active levels سطوح فعال
Aspect Ratio نرخ نسبیت

B

- Ball گوی-دایره
Binary Space Partition Tree درخت دودویی افراز کننده‌ی فضا
Bounded Doubling Dimension بُعد مضاعف کراندار
Bounded Aspect Ratio(BAR)-Tree درخت نسبیت کراندار

C

- Canonical Cut برش کانونی
Canonical Cone مخروط کانونی
Canonical Region ناحیه‌ی کانونی
Canonical Slope شیب کانونی
Child فرزند
Closest Pair نزدیک‌ترین زوج
Closure بستار
Complete k-Partite Graphs گراف کامل k -بخشی
Cone مخروط
Convex محدب
Convex Hull غشای محدب
Convex Regions-Fault Tolerant پوشش‌های هندسی با قابلیت تحمل شکست نواحی محدب
- Geometric Spanners

D

- Degree درجه
Diameter of Point Set قطر مجموعه نقاط
Dilation تأخیر
Doubling Dimension بُعد مضاعف

F

- Fault Regions نواحی شکست
Fat Regions نواحی چاق

Flag پرچم

G

Geometric Network شبکه‌ی هندسی

Grid شبکه

Gridding شبکه‌بندی

H

Half-Space نیم فضا

Hashing درهم سازی

Hub قطب

Hyper Plane ابر صفحه

I

Imprecise Points نقاط غیردقیق

Integer صحیح

Interaction Product ضرب متقابل

L

Long Pair زوج طویل

M

Metric متر

Metric Space فضای متریک

Minimum Cost Perfect Matching تطابق کامل با کم‌ترین هزینه

Minimum Enclosing Disk کوچک‌ترین دیسک در بر گیرنده

Monotonicity یکنواختی

N

Nearest Neighbor نزدیک‌ترین همسایه

Noncrossing Edges یال‌های غیرمتقاطع

Normal Vector بردار نرمال

O

One-Cut تک برش

One-Cutable تک برش پذیر

P

Packing Argument استدلال بسته بندی

Pair زوج

Pair Decomposition تجزیه زوج

Parent پدر
 Partial Quadtree درخت چهارتایی جزئی
 Path مسیر
 Pierce شکافتن
 Polynomial چندجمله‌ای

Q

Quad-Tree درخت چهارتایی
 Quadrant ربع

R

Random تصادفی
 Ray اشعه
 Region Fault Tolerant قابلیت تحمل شکست ناحیه‌ای
 Ring حلقه

S

Semi Separated نیم مجزا
 Semi Separated Pair Decomposition(SSPD) تجزیه زوج نیم مجزا
 Semi Separated Pair of point set زوج مجموعه نقاط نیم مجزا
 Separating Ring حلقه‌ی تفکیک کننده
 Separation Constant ثابت تفکیک
 Short Pair زوج کوتاه
 Size اندازه
 Skinny Region ناحیه‌ی لاغر
 Spanner پوشش
 Split شکاف دادن
 Spread پراکندگی
 Stretch Factor ضریب کشش

T

Tangent Lines خطوط مماس
 Two-Cut دو برش
 Two-Cuttable دو برش پذیر

U

Unorderd Pair زوج نامرتب

V

Visible قابل رویت

W

Weight وزن

Well Separated کاملاً مجزا

Well Separated Pair Decomposition(WSPD) تجزیہ زوج کاملاً مجزا

Well Separated Pair of point set زوج مجموعہ نقاط کاملاً مجزا

مراجع

- [1] Abam, M. A., Carmi, P., Farshi, M., and Smid, M. On the power of the semi-separated pair decomposition. *Computational Geometry* 46, 6 (2013), 631–639.
- [2] Abam, M. A., Carmi, P., Farshi, M., and Smid, M. On the power of the semi-separated pair decomposition. In *Algorithms and Data Structures*. Springer, 2009, pp. 1–12.
- [3] Abam, M. A., de Berg, M., Farshi, M., and Gudmundsson, J. Region-fault tolerant geometric spanners. *Discrete & Computational Geometry* 41, 4 (2009), 556–582.
- [4] Abam, M. A., de Berg, M., Farshi, M., Gudmundsson, J., and Smid, M. Geometric spanners for weighted point sets. *Algorithmica* 61, 1 (2011), 207–225.
- [5] Abam, M. A., and Har-Peled, S. New constructions of sspds and their applications. In *Proc. 26th annual symposium on Computational geometry* (2010), pp. 192–200.
- [6] Abam, M. A., and Har-Peled, S. New constructions of sspds and their applications. *Computational Geometry: theory and applications* 45, 5 (2012), 200–214.
- [7] Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., and Orlin, J. B. *Network flows: theory, algorithms, and applications*. Prentice hall, 1993.
- [8] Bollobás, B., and Scott, A. On separating systems. *European Journal of Combinatorics* 28, 4 (2007), 1068–1071.
- [9] Callahan, P. B., and Kosaraju, S. R. A decomposition of multidimensional point sets with applications to k-nearest-neighbors and n-body potential fields. *Journal of the ACM (JACM)* 42, 1 (1995), 67–90.

- [10] de Berg, M., Cheong, O., Van Kreveld, M., and Overmars, M. *Computational geometry: Algorithms and Applications*. Springer, 2008.
- [11] Duncan, C. A., Goodrich, M. T., and Kobourov, S. Balanced aspect ratio trees: Combining the advantages of k-d trees and octrees. In *Proceedings of the tenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms* (1999), Society for Industrial and Applied Mathematics, pp. 300–309.
- [12] Duncan, C. A., Goodrich, M. T., and Kobourov, S. G. Balanced aspect ratio trees and their use for drawing very large graphs. In *Graph Drawing* (1998). Springer, pp. 111–124.
- [13] Farshi, M. *A theoretical and experimental study of geometric networks*. PhD thesis, Department of Mathematics and Computer Science, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands, 2008.
- [14] Fischer, J., and Har-Peled, S. Dynamic well-separated pair decomposition made easy. In *Canadian Conference on Computational Geometry* (2005), vol. 5, pp. 235–238.
- [15] Funke, S., Matijevic, D., and Sanders, P. Approximating energy efficient paths in wireless multi-hop networks. In *Algorithms-11th Annual European Symposium 2003*. Springer, 2003, pp. 230–241.
- [16] Gupta, A., Krauthgamer, R., and Lee, J. R. Bounded geometries, fractals, and low-distortion embeddings. In *Foundations of Computer Science, 2003, In Proceedings 44th Annual IEEE Symposium on* (2003), IEEE, pp. 534–543.
- [17] Har-Peled, S. *Geometric approximation algorithms*. No. 173. American Mathematical Soc., 2011.
- [18] Har-Peled, S., and Mendel, M. Fast construction of nets in low-dimensional metrics and their applications. *SIAM Journal on Computing* 35, 5 (2006), 1148–1184.
- [19] Motwani, R., and Raghavan, P. *Randomized algorithms*. Cambridge University press, 1995.

- [20] Narasimhan, G., and Smid, M. *Geometric spanner networks*. Cambridge University Press, 2007.
- [21] Overmars, M. H., and Van der Stappen, F. A. Range searching and point location among fat objects. *Journal of Algorithms* 21, 3 (1996), 629–656.
- [22] Preparata, F. P., and Shamos, M. I. *Computational geometry: An introduction*. *Monographs in Computer Science*. Springer, (1993).
- [23] Sheldon M, R. *A First Course In Probability*. Pearson Education, 2012.
- [24] Varadarajan, K. R. A divide-and-conquer algorithm for min-cost perfect matching in the plane. In *Foundations of Computer Science, 1998. Proceedings. 39th Annual Symposium on* (1998), IEEE, pp. 320–329.

Abstract

For a point set P in \mathbb{R}^d , a pair decomposition of P is a set \mathcal{W} of pairs of subsets of P , such that for every pair of points $p, q \in P$ there exists a pair $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathcal{W}$ such that $p \in \mathcal{X}$ and $q \in \mathcal{Y}$, or $p \in \mathcal{Y}$ and $q \in \mathcal{X}$. Semi Separated Pair Decomposition (SSPD), is a pair decomposition that in each pair, the distance between two point sets, is large in comparison with minimum diameter of two point sets. In this thesis, we study the constructions of SSPDs for a point set of n points in plane and in \mathbb{R}^d , with some applications of it. In the newest construction, each point participates in a few pairs ($\mathcal{O}(\log n)$ pairs), that previous constructions did not have this property.

Yazd University

Faculty of Mathematics

Department of Computer Science

Thesis submitted

for the degree of Master of Science

Title:

**On Constructions of Semi Separated Pair
Decomposition of Points and their Applications**

Supervisor: Dr. Mohammad Farshi

Advisor: Dr. Mahdiah Hasheminezhad

By: Farzaneh izadi

October 2013