بسم ا...ّ الرّحمن الرّحیم

حدس سینگر- ورمر

توسط

محمّد فرشی

پایان نامه

ارائه شده به دانشکدهٔ تحصیلات تکمیلی به عنوان بخشی از فعالیتهای
تحصیلی لازم برای اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد

در رشتهٔ

ریاضی

از

دانشگاه شیراز

شیراز ، ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیتهٔ پایان نامه با درجهٔ : **عالی**

امضاء اعضای کمیتهٔ پایان نامه:

دکتر محسن تقوی، استادیار بخش ریاضی(رئیس کمیته) ....

دکتر کریم صدیقی، استاد بخش ریاضی ....

دکتر حیدر زاهد زاهدانی، استادیار بخش ریاضی ....

دکتر بهرام خانی رباطی، استادیار بخش ریاضی ....

اسفند ۱۳۷۷

تقدیم به

روح پرفتوح بت شکن زمان امام خمینی (قدّس سرّه)،

آنان که عاشقانه و خونین به لقاء الله پیوستند،

پدر و مادرم،

و همه آنان که به من آموختند.

سپاسگزاری

سپاس ایزد منّان را که توفیق اتمام این پایان نامه را عطا فرمود. لازم می‌دانم از زحمات تمام افرادیکه در انجام این کار اینجانب را یاری نمودند سپاسگزاری نمایم. بالاخص از زحمات استاد گرامی آقای دکتر زاهدانی که همواره از راهنماییهای ایشان بهره‌مند بوده‌ام تشکر می‌کنم چه اگر نبود ارشادات، پیگیریها و تشویقهای ایشان انجام این کار غیرممکن می‌نمود. همچنین از اعضای کمیتهٔ پایان نامه آقایان دکتر کریم صدیقی، دکتر محسن تقوی و دکتر بهرام خانی رباطی کمال تشکر را دارم. همچنین از اساتیدی که افتخار تلمّذ از محضرشان را داشته‌ام، آقایان دکتر بهمن طباطبائی، دکتر حبیب شریف، دکتر بهمن یوسفی، دکتر مهدی حکیم هاشمی، و از زحمات دکتر مجید ارشاد که ریاست بخش ریاضی را به عهده داشتند سپاسگزارم. در پایان از تمامی کارکنان بخش ریاضی قدردانی می‌کنم.

چکیده

حدس سینگر- ورمر

توسط

محمّد فرشی

عملگر D روی جبر باناخ A را یک اشتقاق(عملگر مشتق) گویند هرگاه به‌ازای هر a و b در A ، $D(ab) = D(a)b + aD(b)$. کار روی برد اشتقاقهای روی جبرهای باناخ توسط سینگر و ورمر در سال ۱۹۵۵ آغاز شد. سینگر و ورمر نشان دادند که برد هر اشتقاق کراندار(پیوسته) روی جبرهای باناخ جابجائی داخل رادیکال(جیکوبسن) قرار می‌گیرد. آنها حدس زدند که شرط پیوستگی اضافی است. این حدس به «حدس سینگر- ورمر» معروف شد. این مسأله حدود ۳۰ سال حل نشد تا اینکه توماس در سال ۱۹۸۸ این حدس را ثابت کرد.

علاوه بر این افراد مختلف تعمیمهای متعدّدی از این قضیه و حدس به جبرهای باناخ غیرجابجائی ارائه کردند. برخی شرایطی را بررسی کردند که ایجاب می‌کند برد اشتقاق روی یک جبر باناخ دلخواه داخل رادیکال قرار گیرد. توماس حدس سینگر- ورمر را با توجه به قضیهٔ سینکلر تعمیم داد و حدس زیر را که به «حدس سینگر- ورمر غیرجابجائی» معروف شد بیان کرد «هر اشتقاق روی یک جبرباناخ، هر ایدآل اولیه را پایا نگه می‌دارد». این حدس هنوز ثابت نشده است و با برخی مسائل باز دیگر در آنالیز تابعی مرتبط است. چندان عجیب نیست که مسائل برد اشتقاقهای روی جبرهای باناخ ارتباط نزدیکی با مسائل پیوستگی خودکار دارد. عده‌ای به جای بحث روی برد اشتقاق، روی تصویر هر عضو تحت یک اشتقاق کار کردند. مثلاً از قضیهٔ کلینِک- شیرکوف برای تعمیم قضیه و حدس سینگر- ورمر استفاده کردند.

این پایان نامه در چهار فصل تنظیم شده است. در فصل اوّل مقدّمات آورده شده است. در فصل دوّم قضیه و حدس سینگر- ورمر بیان و ثابت شده است. در فصل سوّم تعمیمهای ارائه شده برای قضیه و حدس سینگر- ورمر روی جبرهای باناخ غیرجابجائی آورده شده است و بالاخره در فصل چهارم خلاصهٔ مطالب دو فصل پشین و ارتباط حدس سینگر- ورمر با برخی مسائل باز دیگر در آنالیز تابعی بیان شده است.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه‌ای بر جبر باناخ

در این فصل جبرهای باناخ و پاره ای قضایای وابسته به آن را که در فصلهای آتی به آن نیاز داریم بیان می‌کنیم. همچنین تعریف و قضایای مربوط به اشتقاقهای روی جبرهای باناخ و مفهوم فضای ایدآل ماکسیمال، رادیکال(جیکوبسن)، پوچ- رادیکال و تعویضگرهای یک مجموعه در یک جبر و قضایای وابسته را بیان می‌کنیم.

مراجع مناسب جهت بررسی جزئیات عبارتست از [۴]، [۳۶] و [۲].

در تمام این فصل $\mathbb{F}$ نشاندهندهٔ میدان اعداد حقیقی یا مختلط می‌باشد.

۱.۱ جبر باناخ

تعریف ۱.۱.۱ .

فضای برداری A روی میدان $\mathbb{F}$ را یک جبر گوئیم اگر روی آن یک عمل ضرب تعریف شده باشد بطوریکه A با این ضرب یک حلقه باشد و داشته باشیم

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b) \qquad (\alpha \in \mathbb{F}, a, b \in A)$$

فرض کنید A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ و $\|.\|$ یک نرم روی A باشد. اگر به‌ازای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ آنگاه A را یک جبر نرمدار می‌نامند. نرمی که در شرط تعریف فوق صدق کند را یک نرم جبری می نامند.

هر نرم روی فضای A ، متری را بصورت زیر روی آن فضا تعریف می‌کند:

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad x, y \in A$$

این متر را متر القا شده توسط نرم می‌نامند.

یک جبر نرمدار A که نسبت به متر القا شده توسط نرم آن کامل باشد را جبر باناخ می‌نامند.

اگر A دارای عضو یکهٔ e باشد می‌توان فرض کرد $\|e\| = ۱$ زیرا می‌توان روی A یک نرم قرار داد که اولاً دارای خاصیت فوق باشد ثانیاً با نرم قبلی معادل باشد. در اینصورت A را جبر باناخ یکدار می‌نامند.

اگر A یک جبر باناخ یکدار با عضو یکهٔ e باشد تابع ϕ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \phi : \ \ \mathbb{F} &\to \ \ A \\ \alpha &\to \ \ \alpha e \end{aligned}$$

ϕ یک همریختی است پس $\mathbb{F}$ را می‌توان یک زیر فضای A در نظر گرفت.
عضو یکهٔ جبر را با ۱ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲.۱.۱.
ساده ترین مثال از یک جبر باناخ جابجائی $\mathbb{C}$ است.

مثال ۳.۱.۱.
فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاوسدورف و فشرده باشد. اگر ضرب روی $A = C(X)$، مجموعهٔ تمام توابع مختلط پیوسته روی X، را بصورت نقطه ای تعریف کنیم یعنی $(fg)(x) = f(x)g(x)$، آنگاه A با نرم سوپریمم

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

تبدیل به جبر باناخ می‌شود زیرا براحتی می‌توان نشان داد که $C(X)$ یک فضای باناخ است. همچنین با این ضرب بوضوح خاصیت $\alpha(fg) = (\alpha f)g = f(\alpha g)$ برقرار است. کافی است نشان دهیم نرم سوپریمم یک نرم جبری است.
داریم

$$\|fg\| = \sup_{x\in X} |f(x)g(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)| \sup_{x\in X} |g(x)| \leq \|f\|\|g\|$$

پس $C(X)$ یک جبر باناخ است. چون $f(x)g(x) = g(x)f(x)$ پس A جابجائی است. تابع ثابت ۱ عضو یکهٔ $C(X)$ می‌باشد. بنابراین $C(X)$ یک جبر باناخ جابجائی و یکدار است.

مثال ۴.۱.۱.
به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $A = M_{n\times n}(\mathbb{C})$، مجموعهٔ تمام ماتریسهای $n \times n$ با درایه‌های مختلط، را در نظر بگیرید. A با ضرب ماتریسها یک جبر است. برای $n > 1$، A یک جبر غیر جابجائی است. نرم روی A را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|\alpha\| = \left(\sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2\right)^{1/2} \qquad (\alpha = (\alpha_{ij}) \in A)$$

A با این نرم یک جبر باناخ است. توجه کنید که همگرائی نسبت به این نرم معادل همگرائی درایه وار است.
اگر B زیر جبر A متشکل از تمام ماتریسهای به شکل

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

یعنی ماتریسهایی که درایه‌های قطر اصلی آنها ثابت α_0 و درایه‌های زیر قطر اصلی صفر و درایه‌های قبل از قطر اصلی ثابت α_1 و درایه‌های دو قطر قبل از قطر اصلی ثابت α_2 و ... است. در اینصورت B با ضرب اکتسابی از A یک جبر باناخ جابجائی است.

مثال ۵.۱.۱ .
فرض کنید X یک فضای باناخ و $A=B(X)$، مجموعهٔ تمام عملگرهای کراندار روی X باشد. اگر ضرب روی A را ترکیب عملگرها و نرم را نرم عملگرها

$$\|T\|=\sup\{\|Tx\| : \|x\|\leq ۱\}$$

در نظر بگیریم آنگاه A یک جبر باناخ یکدار است زیرا براحتی می‌توان نشان داد $B(X)$ یک فضای باناخ است و شرکت پذیری ضرب نسبت به ضرب اسکالر نیز بوضوح برقرار است. بعلاوه نرم عملگرها یک نرم جبری است زیرا

$$\begin{aligned}\|ST\| &= \sup\{\|STx\| : \|x\|\leq ۱\}\\ &= \sup\{\|S(T(x))\| : \|x\|\leq ۱\}\\ &\leq \sup\{\|S\|\|Tx\| : \|x\|\leq ۱\}\\ &= \|S\|\sup\{\|Tx\| : \|x\|\leq ۱\}\\ &= \|S\|\|T\|.\end{aligned}$$

اگر $dimX\geq ۲$ آنگاه A جابجائی نیست.

قضیه ۶.۱.۱ .
هر جبر باناخ غیر یکدار را می‌توان در یک جبر باناخ یکدار نشاند.

اثبات.
فرض کنید A یک جبر باناخ بدون عضو یکه باشد. قرار می‌دهیم $A_۱=A\oplus\mathbb{F}$. اعمال جبری روی $A_۱$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:
به‌ازای هر $a,b\in A$ و $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$
الف) $(a,\alpha)+(b,\beta)=(a+b,\alpha+\beta)$
ب) $\beta(a,\alpha)=(\beta a,\beta\alpha)$
ج) $(a,\alpha)(b,\beta)=(ab+\alpha b+\beta a,\alpha\beta)$
نرم $\|.\|_۱$ را روی $A_۱$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|(a,\alpha)\|_۱=\|a\|+|\alpha|$$

می‌توان نشان داد که $A_۱$ با اعمال فوق یک جبر باناخ با عضو یکهٔ $(۰,۱)$ است.
حال تابع ϕ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\phi:\ & A\to\ A_۱\\ & a\to\ (a,۰)\end{aligned}$$

داریم $\|\phi(a)\|_۱=\|(a,۰)\|_۱=\|a\|$. پس ϕ طولپا است. همچنین بوضوح ϕ یک به یک است. داریم

$$\phi(ab)=(ab,۰)=(a,۰)(b,۰)=\phi(a)\phi(b)$$

و

$$\phi(a+b)=(a+b,۰)=(a,۰)+(b,۰)=\phi(a)+\phi(b)$$

پس ϕ یک همریختی طولپا از A به $A_۱$ است. بنابراین A با یک زیرفضای بستهٔ $A_۱$ یکریخت است.
□

تعریف ۷.۱.۱ .
عضو a از جبر A را پوچتوان گویند اگر به‌ازای یک $k \in \mathbb{N}$، $a^k = \circ$. عضو a را خودتوان گویند اگر $a^{\text{۲}} = a$.

همانطور که در تعریف جبر بیان شد، اگر A یک جبر باشد آنگاه با عمل ضربِ جبر یک حلقه است.
تعریف ۸.۱.۱ .
فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. منظور از ایدآل(چپ، راست و دوطرفه) A یک زیر فضای برداری A است بطوریکه نسبت به حلقه یک ایدآل(چپ، راست و دوطرفه) باشد.

تعریف ایدآل سره، ماکسیمال و مینیمال نیز مشابه تعریف در نظریهٔ حلقه است.
تعریف ۹.۱.۱ .
ایدآل سرهٔ I از جبر A را اول گویند هرگاه به‌ازای هر ایدآل دلخواه $I_\text{۱}$ و $I_\text{۲}$ از A ، اگر $I_\text{۱}I_\text{۲} \subseteq I$ آنگاه $I_\text{۱} \subseteq I$ یا $I_\text{۲} \subseteq I$.
ایدآل چپ I از A را مدولی گویند اگر عضو $e \in A$ موجود باشد به قسمیکه $A(\text{۱} - e) = \{a - ae : a \in A\} \subseteq I$. بعبارت دیگر e یک عضو یکهٔ راست A به پیمانهٔ I است. بطور مشابه I یک ایدآل راست مدولی است اگر یک یکهٔ چپ به پیمانهٔ I موجود باشد.

توجه کنید که اگر e یک یکهٔ راست(چپ) A به پیمانهٔ یک ایدآل چپ(راست) I باشد آنگاه $e + m(m \in I)$ و $e^k(k \in \mathbb{N})$ نیز چنین است.
تعریف ۱۰.۱.۱ .
اگر ایدآل دو طرفهٔ I مدولی راست و چپ باشد آنگاه I را مدولی می‌نامند.

توجه کنید که اگر ایدآل دوطرفهٔ I مدولی باشد آنگاه عضو $a \in A$ موجود است که هم یکهٔ چپ و هم یکهٔ راست به پیمانهٔ I است زیرا
فرض کنید $e_\text{۱}$ یکهٔ راست و $e_\text{۲}$ یکهٔ چپ به پیمانهٔ I باشند. آنگاه $e_\text{۱} - e_\text{۲}e_\text{۱} \in I$ و $e_\text{۲} - e_\text{۲}e_\text{۱} \in I$. پس $e_\text{۲} - e_\text{۱} \in I$. بنابراین یکی از $e_\text{۱}$ و $e_\text{۲}$ هم یکهٔ چپ و هم یکهٔ راست به پیمانهٔ I می‌باشد.
اگر A یکدار باشد بوضوح هر ایدآل آن مدولی است.

قضیه ۱۱.۱.۱ .
فرض کنید A یک جبر باناخ باشد.
(الف) هر ایدآل چپ مدولی سرهٔ A داخل یک ایدآل چپ ماکسیمال قرار می‌گیرد.
(ب) هر ایدآل چپ مدولی ماکسیمال ، یک ایدآل چپ ماکسیمال است.
(ج) اگر A یکدار باشد هر ایدآل چپ سره، داخل یک ایدآل چپ ماکسیمال قرار می‌گیرد.

اثبات.
ر. ک. [۴] قضیهٔ ۹.۲. □

قضیه ۱۲.۱.۱ .
هر ایدآل چپ مدولی ماکسیمالِ یک جبر باناخ بسته است.

اثبات.
فرض کنید J یک ایدآل چپ مدولی ماکسیمال در جبر باناخ A و e یک یکهٔ راست مدولی برای J باشد. فرض کنید $x \in J$، و $\|e - x\| < \text{۱}$. همچنین فرض کنید $u = \sum_{n=\text{۱}}^{\infty}(e - x)^n$. در

اینصورت $u - u(e-x) = e - x$. بنابراین $e = x + ux + u - ue \in J$. بنابراین $J = A$ و این تناقض است.

بنابراین $J \cap \{x \in A : \|e-x\| < 1\} = \emptyset$. در نتیجه $\overline{J}$ یک ایدآل چپ مدولی بستهٔ سرهٔ A حاوی J است. بنابر ماکسیمال بودن J، $J = \overline{J}$. پس حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۱۳.۱.۱ .

عمل ضرب روی جبر باناخ A یک نگاشت پیوسته است.

اثبات.

فرض کنید $\{x_n\} \to x$ و $\{y_n\} \to y$. برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم $\{x_ny_n\} \to xy$. داریم

$$\begin{aligned} \|x_ny_n - xy\| &= \|(x_n - x)(y_n - y) + x(y_n - y) + (x_n - x)y\| \\ &\leq \|x_n - x\|\|y_n - y\| + \|x\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \end{aligned}$$

پس حکم برقرار است. □

۲.۱ طیف، شعاع طیفی و تعویضگر

تعریف ۱.۲.۱ .

فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار باشد. به‌ازای هر عضو $a \in A$ وارون(چپ، راست و دوطرفه) را همان وارون(چپ،راست و دوطرفه) نسبت به حلقهٔ A در نظر می‌گیریم.

عضوی که وارون چپ و راست داشته باشد را عضو وارونپذیر(یکال) می‌نامند.

بنابر قضایای نظریهٔ حلقه وارون هر عضو وارونپذیر منحصربفرد است. وارون a را با a^{-1} نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $G(A)$ مجموعهٔ تمام اعضای وارونپذیر A باشد. براحتی می‌توان نشان داد که $G(A)$ با عمل ضرب یک گروه است. این گروه را گروه عناصر وارونپذیر A می‌نامند.

تعریف ۲.۲.۱ .

اگر a و b دو عضو جبر باناخ A باشند تعویضگر a و b را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[a, b] = ab - ba$$

بوضوح A جابجائی است اگروتنهااگر تعویضگر هر دو عضو آن صفر باشد.

تعریف ۳.۲.۱ .

نگاشت F روی حلقهٔ R را جابجاگر گویند هرگاه به‌ازای هر $x \in R$, $[F(x), x] = 0$.

نگاشت F روی حلقهٔ R را مرکزساز گویند هرگاه به‌ازای هر $x \in R$, $[F(x), x] \in Z(R)$.

تعریف ۴.۲.۱ .

زیرمجموعهٔ E از جبر A را در نظر بگیرید. تعویضگر E عبارتست از مجموعهٔ

$$\{a \in A| \quad ax = xa \qquad \forall x \in E\}$$

تعویضگر E را با $C(E)$ نمایش می‌دهیم. $C(C(E))$ را دوّمین تعویضگر E می‌نامند.

قضیه ۵.۲.۱ .
فرض کنید E یک زیرمجموعهٔ جبر A باشد. احکام زیر برقرارند:
(الف) $C(E)$ یک زیرجبر A است.
(ب) اگر A یکدار باشد $C(E)$ حاوی عضو یکه است.
(ج) اگر A نرمدار باشد آنگاه $C(E)$ بسته است.
(د) E یک زیرمجموعهٔ جابجائی A است اگر و تنهااگر $E \subseteq C(E)$.
(ه) اگر $E \subseteq F$ آنگاه $C(F) \subseteq C(E)$.
(و) اگر E یک زیر مجموعهٔ جابجائی A باشد آنگاه $C(C(E))$ یک زیرجبر جابجائی A است و $E \subseteq C(C(E)) \subseteq C(E)$.
(ز) مرکز A یک زیرجبر جابجائی A است.

اثبات.
ر. ک. [۴] قضایای ۱۵.۲ و ۱۵.۳. □

نتیجه ۶.۲.۱ .
فرض کنید E زیرمجموعهٔ جبر باناخ A باشد. $C(E)$ زیرجبر بستهٔ A است. اگر E یک زیرمجموعهٔ جابجائی A باشد آنگاه $C(E) \cap C(C(E))$ یک زیرجبر جابجائی و بستهٔ A حاوی E می‌باشد.

تعریف ۷.۲.۱ .
فرض کنید A یک جبر مختلط یکدار باشد. به‌ازای هر $a \in A$، طیفِ a را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda 1 - a \ \text{وارونپذیر نیست}\}$$

در صورتی که ابهامی بوجود نیاید طیفِ a را با $\sigma(a)$ نمایش می‌دهیم.

در صورتیکه A یکدار نباشد طیفِ اعضای آن را طیفِ عضو متناظر آن در یکدار شدهٔ A در نظر می گیریم.

تعریف ۸.۲.۱ .
فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. شعاع طیفی $a \in A$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$$

اگر $r(a) = 0$ آنگاه a را شبه‌پوچتوان مینامند.

مجموعهٔ تمام اعضای شبه پوچتوان A را با $Q(A)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۹.۲.۱ .
فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و $x \in A$. آنگاه
(الف) تابع $\lambda \to (\lambda 1 - x)^{-1}$ یک تابع تحلیلی روی $\mathbb{C} \backslash \sigma(x)$ می‌باشد که در بینهایت به صفر می‌رود.
(ب) $\sigma(x)$ فشرده و ناتهی است.
(ج) $r(x) = \lim_{n \mapsto \infty} \|x^n\|^{1/n}$

اثبات.

ر. ک. [۲] قضیهٔ ۳.۲.۸. □

قضیه ۱۰.۲.۱ .

فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار باشد و $a \in A$ به قسمیکه $r(a) < ۱$. آنگاه $۱ - a$ وارونپذیر است و (با فرض $a^{\circ} = ۱$) داریم

$$.(۱ - a)^{-۱} = \sum_{n=\circ}^{\infty} a^n$$

اثبات.

فرض کنید $\|a\| = r < ۱$ و $s_n = \sum_{k=\circ}^{n} a^k$. بوضوح به‌ازای هر $n < m (m, n \in \mathbb{N})$ داریم

$$\|s_n - s_m\| = \| \sum_{k=n+۱}^{m} a^k \| \leq \sum_{k=n+۱}^{m} \|a\|^k = \sum_{k=n+۱}^{m} r^k = \frac{r^{n+۱}}{۱ - r}$$

چون $r < ۱$ پس وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند $\frac{r^{n+۱}}{۱-r}$ به سمت صفر میل می‌کند. بنابر این $\{s_n\}$ یک دنبالهٔ کوشی است پس همگراست. فرض کنید $s = \sum_{k=\circ}^{\infty} a^k$. داریم

$$as_n = s_{n+۱} - ۱$$

با میل دادن n به سمت بینهایت نتیجه می‌شود

$$as = s - ۱ \quad \Rightarrow \quad (۱ - a)s = ۱$$

بطریق مشابه $s(۱ - a) = ۱$. پس $۱ - a$ وارونپذیر است و

$$(۱ - a)^{-۱} = s = \sum_{k=\circ}^{\infty} a^k.$$

□

لم ۱۱.۲.۱ .

فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار باشد و $a, b \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq \circ$.
$\lambda ۱ - ab$ وارونپذیر است اگر و تنها اگر $\lambda ۱ - ba$ وارونپذیر باشد.

اثبات.

فرض کنید u وارون $\lambda ۱ - ab$ باشد. داریم $(\lambda ۱ - ab)u = u(\lambda ۱ - ab) = ۱$. بنابراین

$$.\lambda u - (ab)u = ۱ \Rightarrow (ab)u = \lambda u - ۱$$

حال

$$\begin{aligned}(\lambda ۱ - ba)(bua + ۱) &= \lambda bua + \lambda ۱ - b(ab)ua - ba \\ &= \lambda bua + \lambda ۱ - b(\lambda u - ۱)a - ba \\ &= \lambda ۱\end{aligned}$$

بطریق مشابه $(bua + ۱)(\lambda ۱ - ba) = \lambda ۱$.

بنابراین $\lambda ۱ - ba$ در A وارونپذیر است. □

نتیجه ۱۲.۲.۱ .
به‌ازای هر $a, b \in A$، $\sigma(ab) - \{\circ\} = \sigma(ba) - \{\circ\}$.

قضیه ۱۳.۲.۱ . (*قضیهٔ نگاشت طیفی*)
فرض کنید A یک جبر باناخ و $a \in A$. اگر p یک چندجمله ای غیرثابت با ضرایب مختلط باشد آنگاه $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$

اثبات.
ر. ک. [۲] قضیهٔ ۳.۲.۶. □

تعریف ۱۴.۲.۱ .
منظور از جبر تقسیمی نرمدار جبر نرمدار A با عضو یکه است به قسمیکه $G(A) = A\backslash\{\circ\}$ یعنی تمام اعضای ناصفر A وارونپذیر باشند.

قضیه ۱۵.۲.۱ . (*گلفاند- مازور*)
اگر A یک جبر باناخ باشد به قسمیکه هر عضو ناصفر آن وارونپذیر باشد آنگاه A با $\mathbb{C}$ یکریخت است.

اثبات.
فرض کنید $a \in A$. بنابر قضیهٔ ۱.۲.۹ $\sigma(a)$ ناتهی است. فرض کنید $\lambda \in \sigma(a)$. $a - \lambda۱$ وارونپذیر نیست در نتیجه بنابفرض $a - \lambda۱ = \circ$ یعنی $a = \lambda۱$. پس $\sigma(a)$ حاوی فقط یک نقطه است. این عضو را با $\alpha(a)$ نشان می‌دهیم. در اینصورت α یک یکریختی از A بروی $\mathbb{C}$ است.
این یکریختی طولپا است زیرا $|\alpha(a)| = \|\alpha(a)۱\| = \|a\|$. پس حکم برقرار است. □

قضیه ۱۶.۲.۱ .
فرض کنید A یک جبر باناخ باشد و $x, y \in A$ به قسمیکه $xy = yx$. در اینصورت $r(xy) \leq r(x)r(y)$ و $r(x+y) \leq r(x) + r(y)$.

اثبات.
ر. ک. [۲] نتیجهٔ ۳.۲.۱۰. □

۳.۱ جبر خارج قسمتها

فرض کنید X یک فضای برداری و L زیرفضای آن باشد. رابطهٔ $\sim$ را روی X بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \sim y \iff x - y \in L$$

$\sim$ یک رابطهٔ هم ارزی است. کلاس هم ارزی حاوی x را L- هم مجموعهٔ x می‌نامند و با x' نمایش می‌دهیم.
مجموعهٔ تمام هم مجموعه ها با جمع و ضرب

$$x'_۱ + x'_۲ = (x_۱ + x_۲)' \quad , \quad \lambda x'_۱ = (\lambda x_۱)'$$

یک فضای برداری تشکیل می دهد. این فضای برداری را فضای تفاضلی X به پیمانهٔ L می‌نامند و با X/L نمایش می دهند.
نگاشت $x \longrightarrow x'$ از X بروی X/L را نگاشت متعارف یا نگاشت خارج قسمتی مینامند.

اگر L یک زیر فضای بستهٔ فضای نرمدار X باشد، نرم روی X/L را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|x'\| = \inf\{\|y\| : \quad y \sim x(y \in x')\}$$

براحتی میتوان نشان داد که $\|.\|$ یک نرم روی X/L است. این نرم را نرم متعارف روی X/L می‌نامند.

تعریف ۱.۳.۱ .

فرض کنید I ایدآل دوطرفهٔ جبر A باشد. عمل ضرب روی A/I را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2)', \quad z_1 = x'_1, z_2 = x'_2 \in A/I$$

هم مجموعهٔ $(x_1 x_2)'$ مستقل از انتخاب x_1 و x_2 است زیرا به‌ازای هر $j_1, j_2 \in I$،

$$(x_1 + j_1)(x_2 + j_2) - x_1 x_2 = x_1 j_2 + j_1 x_2 + j_1 j_2 \in I$$

با این ضرب A/I یک جبر است که جبر خارج قسمتی به پیمانهٔ I مینامند.

اگر I ایدآل دوطرفهٔ بستهٔ جبر نرمدار A باشد آنگاه نرم متعارف یک نرم جبری روی A/I می‌باشد. در نتیجه A/I جبر نرمدار می‌شود.

بوضوح نگاشت متعارف یک همریختی از A بروی A/I می باشد.

در ادامهٔ بحث جبر خارج قسمتها را با نرم متعارف در نظر می‌گیریم مگر آنکه خلاف آن تصریح شود.

قضیه ۲.۳.۱ .

فرض کنید X یک فضای برداری نرمدار و L زیر فضای بستهٔ آن باشد. احکام زیر برقرار است:

(الف) نگاشت متعارف یک نگاشت خطی کراندار از X بروی X/L با نرم ۱ است مگر آنکه $X = L$ که در اینصورت نرم آن صفر است.

(ب) اگر F یک زیرمجموعهٔ X باشد بطوریکه اولاً $F + L = F$، ثانیاً F با نرم X کامل باشد آنگاه برد متعارف آن یک زیرمجموعهٔ کامل X/L است.

(ج) اگر X فضای نرمدار کامل باشد، X/L نیز یک فضای نرمدار کامل است.

اثبات.

ر. ک. [۴] قضیهٔ ۷.۹. □

نتیجه ۳.۳.۱ .

اگر I ایدآل دوطرفهٔ بستهٔ جبر باناخ A باشد آنگاه A/I با نرم متعارف یک جبر باناخ است.

قضیه ۴.۳.۱ .

فرض کنید I یک ایدآل دوطرفهٔ جبر A باشد. آنگاه

$$\sigma_{A/I}(a + I) \subseteq \sigma_A(a)$$

اثبات.

ر. ک. [۴] قضیهٔ ۹.۹. □

۴.۱ فضای ایدآل ماکسیمال

تعریف ۱.۴.۱ .
فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. تابعک خطی ϕ روی A را ضربی می‌نامند اگر

$$.\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \qquad \forall x, y \in A$$

بعبارت دیگر تابعک خطی ضربی یک همریختی از A به $\mathbb{C}$ است.

اگر ϕ یک تابعک خطی ضربی ناصفر روی A باشد آنگاه $\|\phi\| = ۱$ و $\phi(۱) = ۱$.
جبرهای باناخی موجودند که دارای هیچ تابعک خطی ضربی ناصفر نیستند مثل $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ (فضای تمام ماتریسهای $n \times n$ با درایه های مختلط)($n > ۱$) یا $L(H)$ (فضای تمام عملگرهای کراندار روی فضای هیلبرت H).
در بررسی جبرهای باناخ جابجائی تابعکهای خطی ضربی نقش مهمی دارند. در ادامه برای رعایت اختصار منظور از تابعک ضربی، تابعک خطی ضربی است.

قضیه ۲.۴.۱ . (*گلفاند*)
فرض کنید A یک جبر باناخ جابجائی باشد. احکام زیر برقرارند:
(الف) $\phi \to ker\phi$ یک نگاشت یک به یک و پوشا از مجموعهٔ تمام تابعکهای خطی ضربی روی A به روی مجموعهٔ تمام ایدآلهای ماکسیمال A تعریف می‌کند.
(ب) به‌ازای هر $x \in A$،

$$.\sigma(x) = \{\phi(x) : \quad \text{است } A \text{ یک تابعک خطی ضربی روی } \phi\}$$

اثبات.
ر. ک. [۳۷] قضیهٔ ۱۱.۱۱.۵. □
قضیهٔ زیر یک خاصیت مهم یک مجموعه از تابعکهای ضربی را نشان می‌دهد.

قضیه ۳.۴.۱ .
فرض کنید A یک جبر باناخ جابجائی $\{\phi_۱, \phi_۲, \ldots, \phi_n\}$ یک مجموعه از تابعکهای ضربی روی A باشد. آنگاه این مجموعه مستقل خطی است.

اثبات.
فرض کنید $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ و $\alpha_۱\phi_۱ + \cdots + \alpha_n\phi_n = ۰$. به‌ازای هر $۲ \leq i \leq n$، x_i را در $ker\phi_i \backslash ker\phi_۱$ انتخاب می‌کنیم (توجه کنید که طبق قضیهٔ فوق $ker\phi_i \neq ker\phi_۱$). برای $x = x_۲ \cdots x_n$ داریم

$$۰ = \alpha_۱\phi_۱(x) + \cdots + \alpha_n\phi_n(x) = \alpha_۱\phi_۱(x)$$

اگر $\alpha_۱ \neq ۰$ آنگاه $\phi_۱(x) = ۰$ در نتیجه $\phi_۱(x_۲x_۳ \cdots x_n) = ۰$ بنابراین به‌ازای یک $۲ \leq i \leq n$، $\phi_۱(x_i) = ۰$ و این با انتخاب x_i متناقض است. بنابراین $\alpha_۱ = ۰$. به روش مشابه داریم $\alpha_۲ = \cdots = \alpha_n = ۰$. □

مجموعهٔ تمام تابعکهای ضربی غیربدیهی روی A را با Φ_A نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۴.۱ .
فرض کنید A یک جبر باناخ مختلط جابجائی باشد. نمایش گلفاند روی A عبارتست از نگاشت

$$\begin{aligned} g: \quad A \to &\quad C(\Phi_A) \\ a \to &\quad \hat{a} \end{aligned}$$

بطوریکه

$$\begin{aligned}\hat{a}: \quad \Phi_A \to &\quad \mathbb{C}\\ \phi \to &\quad \phi(a)\end{aligned}$$

اگر روی Φ_A توپولوژی ضعیف، ضعیفترین توپولوژی روی دوگان دوّم A که به ازای هر $a \in A$، $\hat{a}$ پیوسته است ، قرار دهیم، $\hat{a}$ یک تابع مختلط پیوسته است.*

تابع g را تبدیل گلفاند نیز می‌نامند.

تعریف ۵.۴.۱.

Φ_A با توپولوژی ضعیف(توپولوژی گلفاند) را فضای ایدآل ماکسیمال A می‌نامند.*

دلیل نامگذاری فضای ایدآل ماکسیمال برای مجموعهٔ تابعکهای ضربی از قضیهٔ ۱.۴.۲ مشخص است.

قضیه ۶.۴.۱.

فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار باشد. Φ_A یک فضای فشرده و هاوسدورف است.

اثبات.

ر. ک. [۴] قضیهٔ ۱۷.۴. □

تعریف ۷.۴.۱.

فرض کنید A یک جبر باناخ مختلط یکدار و $a \in A$. $exp(a)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$exp(a) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!} a^n \quad (a^۰ = ۱)$$

$exp(a)$ را با e^a نیز نمایش می‌دهند. تابع فوق دارای خواصی مشابه تابع نمایی روی اعداد حقیقی است.

قضیه ۸.۴.۱.

فرض کنید A یک جبر باناخ و $a, b \in A$ به قسمیکه $ab = ba$. احکام زیر برقرار است:

(الف) $exp(a+b) = exp(a)exp(b)$

(ب) $exp(a)$ *وارونپذیر است و* $(exp(a))^{-۱} = exp(-a)$

(ج) $\sigma(exp(a)) = exp(\sigma(a))$

(د) $exp(a) = \lim_{n \mapsto \infty} (۱ + \frac{۱}{n} a)^n$

اثبات.

ر. ک. [۴] قضیهٔ ۸.۳. □

تعریف ۹.۴.۱.

فرض کنید X یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ باشد. هر همریختی از جبر A به $L(X)$،مجموعهٔ عملگرهای روی X، را یک نمایش از A روی X می‌نامند.

به‌ازای هر نمایش π از A روی X، A -مدول چپ متناظر با π عبارتست از فضای برداری X با ضرب مدولی $(a \in A, x \in X) \quad ax = \pi(a)x$. برعکس، به‌ازای هر A -مدول چپ X یک نمایش π متناظر با آن از A روی X داریم که با رابطهٔ $\pi(a)x = ax$ تعریف می‌شود. هستهٔ نمایش π متناظر با A -مدول چپ X را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$ker(\pi) = \{a \in A : aX = \{۰\}\}$$

تعریف ۱.۴.۱۰ .
A - مدول X را غیر بدیهی گویند اگر $AX \neq \{\circ\}$.
A - مدول چپ X را تحویلناپذیر گویند اگر اولاً غیربدیهی باشد ثانیاً X و $\{\circ\}$ تنها A - زیرمدولهای آن باشند.
یک نمایش را تحویلناپذیر گویند هرگاه A - مدول متناظر با آن تحویلناپذیر باشد. تحویلناپذیری را می‌توان بصورت زیر نیز تعریف کرد.
نمایش π را تحویلناپذیر گویند اگر تنها زیرفضاهای X که تحت $\pi(x)$ پایاست $\{\circ\}$ و X باشند.

مثال ۱.۴.۱۱ .
فرض کنید L یک ایدآل چپ جبر A باشد. نگاشت متعارف $a \to a'$ از A بروی A/L را در نظر بگیرید. A/L با ضرب مدولی

$$ax' = (ab)' \quad (a, b \in A, b \sim x)$$

یک A - مدول چپ است. این A - مدول چپ را A - مدول منظم از چپ می‌نامند. نمایش متناظر با این A - مدول را نمایش منظم از چپ روی A/L می‌نامند. بوضوح هستهٔ این نمایش مجموعهٔ زیر است:

$$\{a \in A : \quad (aA)' = \{\circ\}\} = \{a \in A : \quad aA \subseteq L\}$$

تعریف ۱.۴.۱۲ .
فرض کنید L یک ایدآل چپ جبر A باشد. منظور از خارج قسمت L ایدآل دوطرفهٔ زیر است.

$$\{a \in A : \quad aA \subseteq L\}$$

خارج قسمت L را با $L : A$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۴.۱۳ .
ایدآل دوطرفهٔ P از A را اولیه می‌نامیم اگر خارج قسمت یک ایدآل چپ مدولی ماکسیمال باشد.
جبر A را اولیه گویند اگر $\{\circ\}$ یک ایدآل اولیهٔ آن باشد.

مجموعهٔ تمام ایدآلهای اولیهٔ A را با $Prim(A)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۴.۱۴ .
فرض کنید P یک ایدآل اولیهٔ جبر باناخ A باشد. دراینصورت A/P یک جبر باناخ اولیه است.

اثبات.
ر. ک. [۴] قضیهٔ ۲۶.۹. □

قضیه ۱.۴.۱۵ .
(الف) P یک ایدآل اولیهٔ A است اگر و تنها اگر هستهٔ یک نمایش تحویلناپذیر A باشد.
(ب) هر ایدآل اولیه، اول است.
(ج) هر ایدآل اولیه با اشتراک تمام ایدالهای چپ مدولی ماکسیمال حاوی آن برابر است.

اثبات.
ر. ک. [۴] قضیهٔ ۲۴.۱۲. □

نتیجه ۱.۴.۱۶ .
هر ایدآل اولیه بسته است.

اثبات.
بنا بر قضیهٔ ۱.۱.۱۲ و قسمت (ج) قضیهٔ فوق بدیهی است. □

نتیجه ۱۷.۴.۱ .
اگر A جابجائی باشد آنگاه ایدال P اولیه است اگروتنهااگر مدولی ماکسیمال باشد.

لم ۱۸.۴.۱ .
اگر $P_1, \ldots, P_m$ ایدآلهای اولیهٔ متمایز از همبعدی متناهی روی جبر باناخ مختلط A باشند آنگاه $A/P_1 \cap \cdots \cap P_m$ با $A/P_1 \oplus \cdots \oplus A/P_m$ یکریخت است و به‌ازای $n = 1, \ldots, m$،

$$\cap \{P_j | \; 1 \leq j \leq n\} + \cap\{P_j | \; n+1 \leq j \leq m\} = A.$$

اثبات.
ر. ک. [۴۴] لم ۷.۴. □

۵.۱ رادیکال

تعریف ۱.۵.۱ .
فرض کنید A یک جبر باشد. رادیکال جیکوبسن A عبارتست از اشتراک هستهٔ تمام نمایشهای تحویلناپذیر روی A که با $\mathsf{rad}(A)$ نمایش می‌دهیم.

اگر هیچ نمایش تحویلناپذیری(یا بعبارت دیگر هیچ ایدآل اولیهٔ ناصفر) روی A موجود نباشد تعریف می‌کنیم $\mathsf{rad}(A) = A$.
اگر $\mathsf{rad}(A) = \{0\}$ آنگاه A را نیمساده و اگر $\mathsf{rad}(A) = A$ آنگاه A را جبر رادیکال می‌نامند.

قضیه ۲.۵.۱ .
(الف) $\mathsf{rad}(A)$ با اشتراک تمام ایدآلهای اولیهٔ A برابر است.
(ب) $\mathsf{rad}(A)$ با اشتراک ایدآلهای چپ مدولی ماکسیمال A برابر است.

اثبات.
بنابر قضیهٔ ۱.۴.۱۵ بدیهی است. □

قضیه ۳.۵.۱ .
فرض کنید A یک حلقهٔ یکدار باشد. احکام زیر برقرار است:
(الف) $\mathsf{rad}(A)$ با اشتراک تمام ایدآلهای چپ ماکسیمال A برابر است.
(ب) $\mathsf{rad}(A)$ با اشتراک تمام ایدآلهای راست ماکسیمال A برابر است.
(ج) $\mathsf{rad}(A) = \{x \in A |$ *وارونپذیر است* $1 - zx \quad \forall z \in A\}$
(د) $\mathsf{rad}(A) = \{x \in A |$ *وارونپذیر است* $1 - xz \quad \forall z \in A\}$

اثبات.
ر. ک. [۲] قضیهٔ ۳.۱.۳. □
در ادامه منظور ما از رادیکال، رادیکال جیکوبسن است.

مثال ۴.۵.۱ .
اگر X یک فضای باناخ باشد آنگاه $L(X)$ نیمساده است.

اثبات.
ر. ک. [۲] قضیهٔ ۳.۱.۴. □

قضیه ۵.۵.۱ .
فرض کنید A یک جبر باشد.
(الف) اگر B یک ایدآل دو طرفهٔ A باشد آنگاه $\mathrm{rad}(B) = B \cap \mathrm{rad}(A)$.
(ب) $A/\mathrm{rad}(A)$ نیمساده است.

اثبات.
ر. ک. [۴] نتیجهٔ ۲۴.۲۰ و قضیهٔ ۲۴.۲۱. □

قضیه ۶.۵.۱ .
فرض کنید A جبر باناخ مختلط جابجائی باشد. آنگاه

$$\mathrm{rad}(A) = \cap_{\phi \in \Phi_A} ker(\phi)$$

اثبات.
بنابر قضیهٔ ۱.۴.۲ و قضیهٔ فوق حکم بدیهی است. □

قضیه ۷.۵.۱ .
فرض کنید A جبر نرمدار باشد آنگاه $\mathrm{rad}(A) \subseteq Q(A)$.

اثبات.
ر. ک. [۳۶] قضیهٔ ۲.۳.۴. □

قضیه ۸.۵.۱ .
اگر A جبر باناخ باشد آنگاه $\mathrm{rad}(A)$ یک ایدآل دوطرفهٔ بستهٔ A است.

اثبات.
بنابر قضیهٔ ۱.۱.۱۲ بدیهی است. □

قضیه ۹.۵.۱ .
فرض کنید a یک عضو جبر باناخ A باشد که به پیمانهٔ $\mathrm{rad}(A)$ خودتوان است. در اینصورت یک عضو خودتوان e در A موجود است بطوریکه به پیمانهٔ $\mathrm{rad}(A)$ با a مساوی است.

اثبات.
ر. ک. [۳۶] قضیهٔ ۲.۳.۹. □

قضیه ۱۰.۵.۱ . [۳۴]
فرض کنید A یک جبر باناخ و $a \in A$. احکام زیر معادلند:
(الف) به‌ازای هر $x \in A$, $[a, x] \in \mathrm{rad}(A)$.
(ب) به‌ازای هر $x \in A$, $r(ax) \le r(a)r(x)$.
(ج) به‌ازای هر $x \in A$، $\alpha \in \mathbb{R}$ موجود است به قسمیکه $r(\alpha x) \le \alpha r(x)$.
(د) به‌ازای هر $x \in A$, $r(a + x) \le r(a) + r(x)$.
(ه) به‌ازای هر $x \in A$ و یک β، $r(a + x) \le \beta + r(x)$.
(و) $\sup\{r(a - e^{-x}ae^{x}) : x \in A\} < \infty$.
(ز) به‌ازای هر $x \in A$، $r(a - e^{-x}ae^{x}) = 0$.

اثبات.

ر. ک. [۳۴] قضیهٔ ۲.۱. □

قضیه ۱.۵.۱۱ .

فرض کنید A یک جبر باناخ و a یک عضو شبه پوچتوان A باشد. هر یک از شرایط زیر ایجاب می‌کند که $a \in \mathsf{rad}(A)$.

(الف) *به‌ازای هر* $x \in A$، $r([a,x]) = 0$.

(ب) *به‌ازای هر عضو وارونپذیر* y در A ، $r(a - y^{-1}ay) = 0$.

اثبات.

ر. ک. [۳۴] قضیهٔ ۳.۱. □

قضیه ۱.۵.۱۲ .

فرض کنید A جبر باناخ و $a \in A$. احکام زیر معادلند:

(الف) $a \in \mathsf{rad}(A)$.

(ب) *به‌ازای هر* $x \in A$، $r(ax) = 0$.

(ج) *به‌ازای هر عضو وارونپذیر* $x \in A$، $r(ax) = 0$.

(د) $r(a) = 0$ *و به‌ازای هر* $x \in A$، $r([a,x]) = 0$.

(ه) *به‌ازای هر* $x \in A$، $\sigma(a+x) = \sigma(x)$.

(و) *به‌ازای هر* $x \in A$, $r(a+x) = r(x)$.

(ز) *اگر* $x \in A$ *و* $r(x) = 0$ *آنگاه* $r(a+x) = 0$.

(ح) $r(a) = 0$ *و به‌ازای هر عضو وارونپذیر* $y \in A$، $r(a - y^{-1}ay) = 0$.

اثبات.

ر. ک. [۳۴] قضیهٔ ۳.۲. □

تعریف ۱.۵.۱۳ .

فرض کنید A یک جبر باشد. اشتراک تمام ایدآلهای اول A را رادیکال اول A می‌نامند.

تعریف ۱.۵.۱۴ .

زیر مجموعهٔ E از جبر A را پوچ می‌نامند اگر هر عضو آن پوچتوان باشد.

رادیکال اول A یک پوچ ایدآل است یعنی هر عضو آن پوچتوان است. به همین دلیل رادیکال اول را پوچ- رادیکال نیز می‌نامند. رادیکال اول یا پوچ- رادیکال A را با $nil(A)$ نمایش می‌دهیم. چون هر ایدآل اولیه، اول است (قضیهٔ ۱.۴.۱۵) پس $nil(A) \subseteq \mathsf{rad}(A)$.

تعریف ۱.۵.۱۵ .

جبر A نیمه اول گویند اگر $nil(A) = \{0\}$.

قضیه ۱.۵.۱۶ .

رادیکال حاوی هر ایدآل شبه پوچتوان (یعنی ایدآلی که تمام اعضایش شبه پوچتوان است) است. همچنین اگر $Q(A)$ ایدآل باشد آنگاه $\mathsf{rad}(A) = Q(A)$.

اثبات.

ر. ک. [۳۶] قضیهٔ ۲.۱.۵ و نتیجهٔ ۲.۱.۶. □

قضیه ۱۷.۵.۱ .
فرض کنید A یک جبر نیمه اول باشد. اگر L یک ایدآل چپ A باشد به قسمیکه $L^{۲} = \{۰\}$ آنگاه $L = \{۰\}$.

اثبات.
ر. ک. [۴] لم ۳۰.۴. □

قضیه ۱۸.۵.۱ .
هر جبر نیمساده، نیمه اول است.

اثبات.
چون $nil(A) \subseteq \mathsf{rad}(A)$ پس حکم بدیهی است. □

۶.۱ اشتقاقها و خودریختی ها

تعریف ۱.۶.۱ .
اشتقاق روی جبر A (یا یک A -اشتقاق) یک عملگر خطی D روی A است بطوریکه

$$D(ab) = aD(b) + D(a)b \quad (a, b \in A)$$

عملگر خطی D روی A را اشتقاق ژوردان گویند اگر به‌ازای هر $a \in A$، $D(a^{۲}) = aD(a) + D(a)a$.

بوضوح هر اشتقاق، یک اشتقاق ژوردان است.

مثال ۲.۶.۱ .
فرض کنید A یک جبر باشد. به‌ازای هر a در A نگاشت δ_a از A به A را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\delta_a(x) = [a, x] = ax - xa \quad (a \in A)$$

براحتی می‌توان نشان داد δ_a یک اشتقاق روی A است. چنین اشتقاقی را اشتقاق درونی روی A می‌نامند. اشتقاق درونی پیوسته(کراندار) است زیرا

$$\|\delta_a(x)\| = \|ax - xa\| \leq \|ax\| + \|xa\| \leq \|a\|\|x\| + \|x\|\|a\| = ۲\|a\|\|x\|$$

در نتیجه $\|\delta_a\| \leq ۲\|a\|$.

بوضوح A جابجائی است اگر و تنها اگر صفر تنها اشتقاق درونی آن باشد.

مثال ۳.۶.۱ .
فرض کنید A یک جبر یکدار و a یک عضو غیر جبری A باشد یعنی عناصر $۱, a, a^{۲}, \ldots$ مستقل خطی باشند. همچنین فرض کنید B زیر جبر تولید شده توسط $۱, a$ باشد و نگاشت D را از B به B بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D(\alpha_۰ + \alpha_۱ a + \cdots + \alpha_n a^n) = \alpha_۱ + ۲\alpha_۲ a + \cdots + n\alpha_n a^{n-۱}$$

آنگاه D یک اشتقاق روی B است که درونی نیست زیرا B جابجائی است امّا $D \neq ۰$.

مثال ۴.۶.۱ .
جبر باناخ

$$A=\left\{\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} | x,y,z\in\mathbb{C}\right\}$$

را در نظر بگیرید. D را روی A بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$D\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\right)=\left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\right]$$

مثال ۵.۶.۱ .
جبر باناخ

$$A=\left\{\begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} | x,y,w,z\in\mathbb{C}\right\}=M_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

را در نظر بگیرید. D را روی A بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$D\left(\begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix}\right)=\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix}\right]$$

A یک جبر اولیه است.

ساختن اشتقاقهای بیکران(ناپیوسته) روی جبرهای باناخ کمی مشکل است. مثال زیر نمونه ای از اشتقاق بیکران است.

مثال ۶.۶.۱ .
فرض کنید A مجموعهٔ تمام جمعهایی به شکل

$$\lambda r+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j$$

باشد که $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ اسکالر و $e_1,\dots,e_n$ خودتوان و دو بدو متعامد باشند و r یک عضو ثابت باشد به قسمیکه $r^2=0$ و به‌ازای هر j، $e_jr=re_j=0$(توجه کنید که $e_1,\dots,e_n$ و r از یک جبر باناخ دلخواه اختیار می‌شوند). نرم روی A را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|\lambda r+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j\|=\max\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2\right)^{1/2},\left|\lambda-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right|\right\}$$

حال کامل شدهٔ A را A' می نامیم. A' یک جبر باناخ (جابجائی) است. بنابر نتیجه ای از باده و کرتیس [۳] $\mathrm{rad}(A')=\mathbb{C}r$ و یک ایدآل غیربستهٔ I از A' موجود است به قسمیکه $A'=I\oplus\mathbb{C}r$. اشتقاق D را روی A' بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D(a+\lambda r)=\lambda r\quad(a\in I,\lambda\in\mathbb{C})$$

بنابراین $ker(D)=I$. پس D نمی‌تواند کراندار باشد زیرا در غیر اینصورت اگر x یک نقطهٔ حدی $ker(D)$ باشد بنابر پیوستگی D حد از D می‌گذرد در نتیجه $D(x)=0$ یعنی $x\in ker(D)$ پس $ker(D)$ بسته است و این با غیربسته بودن I در A' متناقض است.

اگر D یک اشتقاق روی جبر باناخ غیر یکدار A باشد در اینصورت با تعریف $D(۱)=\circ$ ، Dیک اشتقاق روی یکدار شدهٔ A است. پس بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد شود فرض می‌کنیم اشتقاقهای مورد بحث روی جبرهای باناخ یکدار تعریف شده اند هرچند در فرض خاصیت یکداری نداشته باشیم.

حال تعدادی از خواص جبری اشتقاقها را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۷.۶.۱ .
فرض کنید D یک اشتقاق روی جبر A باشد.با فرض (همانی)$D^\circ = I$ احکام زیر برقرارند:
(الف) (قاعدهٔ لایب نیتز)

$$D^n(ab)=\sum_{r=\circ}^{n}\binom{n}{r}(D^{n-r}a)(D^r b) \quad (n\in\mathbb{N},a,b\in A)$$

(ب) $D(a^n)=na^{n-۱}Da$ *اگر و تنها اگر* $aDa=(Da)a$.
(ج) *اگر* $D^۲a=\circ$ *آنگاه* $D^n(a^n)=n!(Da)^n (n\in\mathbb{N})$.

اثبات.
(الف) با استقرا ثابت می‌شود.
(ب)
($\Leftarrow$)

$$D(a^۲)=۲aDa\Rightarrow aDa+(Da)a=۲aDa\Rightarrow (Da)a=aDa$$

($\Rightarrow$)
به‌ازای $n=۲$ حکم برقرار است. فرض کنید حکم به‌ازای n برقرار باشد. داریم

$$\begin{aligned} D(a^{n+۱}) &= D(a^n a)\\ &= D(a^n)a+a^nDa\\ &= (na^{n-۱}Da)a+a^nDa\\ &= na^nDa+a^nDa\\ &= (n+۱)a^nDa. \end{aligned}$$

پس حکم برقرار است.
(ج) به‌ازای $n=۲$ داریم

$$\begin{aligned} D^۲(a^۲) &= D(D(a^۲))\\ &= D(aDa+(Da)a)\\ &= (Da)(Da)+aD^۲(a)+D^۲(a)a+(Da)(Da)\\ &= ۲(Da)^۲ \end{aligned}$$

حال فرض کنید حکم به‌ازای n برقرار باشد. چون $D^۲(a)=\circ$ پس به‌ازای هر $n\geq ۲$، $D^n(a)=\circ$.

پس داریم

$$\begin{aligned} D^{n+1}(a^{n+1}) &= D^{n+1}(a^n.a) \\ &= \sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}D^{n+1-r}(a^n)D^r(a) \\ &= \binom{n+1}{0}D^{n+1}(a^n)D^0(a)+\binom{n+1}{1}D^n(a^n)Da \\ &= D^{n+1}(a^n)a+(n+1)D^n(a^n)Da \\ &= D^{n+1}(a^n)a+(n+1)n!(Da)^nDa \\ &= D^{n+1}(a^n)a+(n+1)!(Da)^{n+1} \\ &= (n+1)!(Da)^{n+1} \end{aligned}$$

زیرا

$$\begin{aligned} D^{n+1}(a^n) &= D(D^n(a^n)) \\ &= D(n!(Da)^n) \\ &= n!D((Da)^n) \end{aligned}$$

با استقرا ثابت میکنیم به‌ازای $n \geq 1$، $D((Da)^n)=0$.
به‌ازای $n=1$ داریم $D(Da)=D^2(a)=0$.
فرض کنید حکم به‌ازای n برقرار باشد. داریم

$$\begin{aligned} D((Da)^{n+1}) &= D((Da)^nDa) \\ &= D((Da)^n)Da+(Da)^nD^2(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۸.۶.۱ .
فرض کنید D یک اشتقاق روی جبر A و e عضو خودتوان A باشد. احکام زیر برقرارند:
(الف) $e(De)e=0$.
(ب) *اگر* $eDe=(De)e$ *آنگاه* $De=0$.
(ج) *اگر A یکدار باشد آنگاه* $D1=0$.

اثبات.
(الف)

$$\begin{aligned} &e^2=e \Rightarrow De=D(e^2)=eDe+(De)e \\ &\Rightarrow eDe=e^2De+e(De)e=eDe+e(De)e \Rightarrow e(De)e=0 \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} De &= D(e^2) \\ &= eDe+(De)e \\ &= e^2De+(De)e^2 \\ &= ee(De)+(De)ee \\ &= e(De)e+e(De)e \\ &= 2e(De)e \\ &= 0 \end{aligned}$$

(بنابر الف)
(ج) چون ۱ خودتوان است پس بنابر (ب) $D1=0$.
□

تعریف ۹.۶.۱ .
هر یکریختی از جبر A بروی خودش را یک خودریختی روی جبر A می‌نامند.

مثال ۱۰.۶.۱ .
فرض کنید A یک جبر یکدار باشد و $c \in G(A)$ (یعنی c یک عضو وارونپذیر A باشد). نگاشت α_c روی A را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\alpha_c(a) = c^{-1}ac \quad a \in A$$

براحتی می‌توان نشان داد α_c یک خودریختی روی A است.
منظور از خودریختی درونی روی A یک خودریختی روی A است بطوریکه به‌ازای یک $c \in G(A)$ با α_c مساوی باشد.

بوضوح اگر c در مرکز A باشد آنگاه $\alpha_c = I$. در حالت خاص اگر A جابجائی باشد I تنها خودریختی درونی روی A است. برعکس اگر A یک جبر باناخ یکدار باشد و I تنها خودریختی درونی روی A باشد آنگاه A جابجائی است. برای نشان دادن حالت اخیر توجه کنید که A پدید آمدهٔ خطی $G(A)$ است(قضیهٔ ۲.۹ [۴]).

قضیه ۱۱.۶.۱ .
فرض کنید D یک اشتقاق پیوسته روی جبر باناخ A باشد. آنگاه $exp(D)$ یک خودریختی پیوسته روی A می‌باشد.

اثبات.
ر. ک. [۴] قضیهٔ ۱۸.۷. □
قضیهٔ زیر توسط کاپلانسکی مطرح شد و کلینک [۲۳] و شیرکوف [۴۲] مستقلاً آن را ثابت کردند.

قضیه ۱۲.۶.۱ . (*کلینک-شیرکوف*)
فرض کنید A جبر باناخ و $a, b \in A$. اگر $[a,[a,b]] = 0$ (یا بعبارتی $a(ab-ba) = (ab-ba)a$) آنگاه $r([a,b]) = 0$ ($[a,b]$ شبه پوچتوان است).

اثبات.
فرض کنید $D = \delta_a$. بنابر فرض $D^2(b) = 0$. بنابر قسمت ج قضیهٔ ۱.۶.۷

$$D^n(b^n) = n!(Db)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

همچنین $\|D\| \leq 2\|a\|$. بنابراین

$$\|(Db)^n\| = \|\frac{1}{n!}D^n(b^n)\| \leq \frac{1}{n!}\|D\|^n\|b^n\| \leq \frac{1}{n!}2^n\|a\|^n\|b\|^n$$

$$\Rightarrow \|(Db)^n\|^{1/n} \leq (n!)^{-1/n}2\|a\|\|b\| \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

امّا وقتی $n \to \infty$ داریم $(n!)^{-1/n} \to 0$ پس $r(Db) = 0$. بنابراین $Db = [a,b]$ شبه پوچتوان است.
□

قضیه ۱۳.۶.۱ . (*Weilandt-Wintner*)
فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. هیچ دو عنصر $a, b \in A$ موجود نیست به قسمیکه $[a,b] = 1$.

اثبات.
اشتقاق درونی δ_a را در نظر بگیرید. بوضوح δ_a کراندار است و

$$\delta_a^2(b) = \delta_a(\delta_a(b)) = \delta_a(1) = 0$$

بنابر قضیهٔ فوق $\delta_a(b)$ شبه پوچتوان است و این تناقض است زیرا $\delta_a(b) = ab - ba = 1$. □

نتیجه ۱۴.۶.۱ .
(Šilov) فرض کنید $\mathbb{C}^\infty[0,1]$ جبر تمام توابع با مشتق پیوسته از هر مرتبه روی بازهٔ واحد $[0,1]$ باشد. هیچ نرمی روی $\mathbb{C}^\infty[0,1]$ موجود نیست بطوریکه آن را به جبر باناخ تبدیل کند.

اثبات.
ر. ک. [۴]. □

لم ۱۵.۶.۱ .
فرض کنید D یک اشتقاق روی جبر A و P یک ایدآل دوطرفهٔ A و $x \in P$. آنگاه به‌ازای $n = 1, 2, \ldots$،

$$D^n(x^n) + P = n!(D(x))^n + P$$

اثبات.
ابتدا نشان میدهیم به‌ازای هر $0 \leq j < k$ ، $D^j(x^k) \in P$. با استفادهٔ مکرر از قاعدهٔ لایب نیتز $D^j(x^k)$ بصورت یک حاصل جمع متناهی از عناصری به شکل

$$D^{\epsilon_1}(x)D^{\epsilon_2}(x)\cdots D^{\epsilon_k}(x)$$

می‌باشد که ϵ_iها اعداد صحیح نامنفی اند و $\sum_{i=1}^{k}\epsilon_i = j < k$. پس حداقل یکی از ϵ_iها صفر است. در نتیجه در هر حاصلضرب یک عامل x وجود دارد. بنابراین هر حاصلضرب فوق متعلق به Pاست. بنابراین $D^j(x^k) \in P$ $(0 \leq j < k)$.
حال حکم را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم.
فرض کنید حکم به‌ازای n برقرار باشد. بنابر قاعدهٔ لایب نیتز و مطالب فوق داریم

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(x^{n+1}) &= D(D^n(x^n.x)) \\
&= D(\textstyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}D^{n-j}(x^n)D^j(x)) \\
&= \textstyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(D^{n-j+1}(x^n)D^j(x) + D^{n-j}(x^n)D^{j+1}(x)\right) \\
&\in nD^n(x^n).D(x) + D^n(x^n)D(x) + P \\
&\subseteq (n+1)!(D(x))^{n+1} + P
\end{aligned}$$

پس حکم برقرار است. □

قضیه ۱۶.۶.۱ . (سینکلر ۱۹۶۹)
فرض کنید A یک جبر باناخ (روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) و D یک اشتقاق پیوسته روی A باشد. در اینصورت هر ایدآل اولیه تحت D پایاست.

اثبات.
فرض کنید P یک ایدآل دو طرفهٔ بسته در A باشد. اگر $x \in P$ بنابر لم قبل داریم

$$D^n(x^n) + P = n!(D(x))^n + P = n!(D(x) + P)^n$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\|(D(x)+P)^n\|^{1/n} &= \|\tfrac{1}{n!}(D^n(x^n)+P)\|^{1/n}\\ &= \left(\tfrac{1}{n!}\|D^n(x^n)+P\|\right)^{1/n}\\ &\le \left(\tfrac{1}{n!}\|D\|^n\|x\|^n\right)^{1/n} = (n!)^{-1/n}\|D\|\|x\|\end{aligned}$$

چون D پیوسته و در نتیجه $\|D\| < \infty$ پس اگر $n \to \infty$ طرف راست نامساوی به سمت صفر میل می‌کند. پس طرف چپ نیز به سمت صفر میل می‌کند یعنی

$$\lim_{n\to\infty} \|(D(x)+P)^n\|^{1/n} = 0$$

بنابراین $D(x)+P$ در A/P شبه پوچتوان است.

از طرف دیگر $D(P)+P$ یک ایدآل دوطرفهٔ A است زیرا به‌ازای هر $a \in A$، $x \in P$ داریم

$$a(D(x)+P) = aD(x)+P = D(ax)-(Da)x+P = D(ax)+P \in D(P)+P$$

پس $A(D(P)+P) \subseteq D(P)+P$. بطریق مشابه $(D(P)+P)A \subseteq D(P)+P$. بنابر قضیهٔ ۱.۵.۱۶ $\frac{D(P)+P}{P} \subseteq \mathrm{rad}(A/P)$. حال اگر P یک ایدآل اولیه(یا اشتراکی از ایدآلهای اولیه) باشد آنگاه A/P اولیه و در نتیجه نیمساده است. پس

$$\frac{D(P)+P}{P} = \{0\}$$

بنابراین $D(P) \subseteq P$. □

فرض کنید A یک جبر باناخ و D یک اشتقاق روی A و I یک ایدآل بستهٔ A باشد که تحت Dپایاست. بنابر نتیجهٔ ۱.۳.۳ ، A/I یک جبر باناخ است. متناظر با D و I اشتقاق D_I روی A/I را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} D_I:\quad A/I &\to A/I\\ a+I &\mapsto D(a)+I\end{aligned}$$

چون I تحت D پایاست، D_I خوشتعریف است. براحتی می‌توان نشان داد D_I یک اشتقاق روی A/I است. D_I را اشتقاق القا شده توسط D روی A/I می‌نامند.

لم ۱۷.۶.۱ .

فرض کنید A یک جبر باناخ و D یک اشتقاق روی A و S یک زیرمجموعهٔ A باشد آنگاه $D(C(S\cup D(S))) \subseteq C(S)$. بالاخص اگر $D(S) \subseteq S$ آنگاه $D(C(S)) \subseteq C(S)$

اثبات.

فرض کنید x عضو دلخواهی از $C(S\cup D(S))$ باشد. نشان می‌دهیم $Dx \in C(S)$ یعنی به‌ازای هر $s \in S$، $[Dx,s]=0$.

فرض کنید s عضو دلخواهی از S باشد. بنابر انتخاب x داریم $[x,s]=0$ و $[x,Ds]=0$. در نتیجه

$$\begin{aligned} 0 = D([x,s]) &= D(xs-sx) = D(xs)-D(sx)\\ &= (Dx)s + xDs - (Ds)x - sD(x)\\ &= [Dx,s]+[x,Ds] = [Dx,s]\end{aligned}$$

در نتیجه $Dx \in C(S)$. پس قسمت اول ثابت شد. قسمت دوم بوضوح از قسمت اول نتیجه می‌شود.
□

لم ۱۸.۶.۱ .
فرض کنید D یک اشتقاق روی جبر A و P یک ایدآل اول مینیمال A باشد. آنگاه $D(P) \subseteq P$.

اثبات.
فرض کنید P یک ایدآل اول مینیمال A باشد. ثابت می‌کنیم که ایدآل

$$P' = \{a \in P | D^k(a) \in P \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\}$$

نیز اول است. چون $D(P') \subseteq P'$، مینیمال بودن P ایجاب میکند که $D(P) \subseteq P$.
a و b را در A در نظر بگیرید بطوریکه $a \notin P'$ امّا به‌ازای هر $x \in A$، $axb \in P'$. $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ را بگونه ای انتخاب کنید که $D^n(a) \notin P$ امّا به‌ازای هر $m < n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، $D^m(a) \in P$(چون $a \notin P'$ چنین nی موجود است). با استقرا ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، $D^k(b) \in P$.
با بکاربردن قاعدهٔ لایب نیتز داریم

$$D^{n+k}(axb) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n+k}{j} D^{n+k-j}(a) D^j(xb) + \binom{n+k}{k} D^n(a) D^k(xb) +$$

$$\sum_{j=k+1}^{n+k} \binom{n+k}{j} D^{n+k-j}(a) D^j(xb).$$

بنابر فرض عبارت سمت چپ تساوی و جمعوند سوّم سمت راست تساوی به P تعلق دارند. اگر $k = 0$، آنگاه جمعوند سمت راست تساوی از بین می‌رود. پس به‌ازای هر $x \in A$، $D^n(a)xb \in P$. در نتیجه $b \in P$.
اگر $k \geq 1$، اولین جمعوند سمت راست برابر است با

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k-1} \tbinom{n+k}{j} D^{n+k-j}(a) D^j(xb) &= \sum_{j=0}^{k-1} \tbinom{n+k}{j} D^{n+k-j}(a) \\ &\qquad \sum_{i=0}^{j} \tbinom{j}{i} D^{j-i}(x) D^i(b) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{j} \tbinom{n+k}{j} \tbinom{j}{i} D^{n+k-j}(a) \\ &\qquad D^{j-i}(x) D^i(b)\end{aligned}$$

حال اگر حکم برای اعداد کوچکتر از k برقرار باشد آنگاه داریم $D^i(b) \in P, 1 \leq i \leq j \leq k-1$. بنابراین با توجه به تساوی فوق داریم

$$D^n(a) D^k(xb) \in P \qquad \forall\, x \in A \tag{1.1}$$

با بکاربردن قاعدهٔ لایب نیتز داریم

$$D^n(a) D^k(xb) = D^n(a) x D^k(b) + D^n(a) \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} D^{k-j}(x) D^j(b)$$

بنا بر رابطهٔ ۱.۱ و فرض استقرا

$$.D^n(a) x D^k(b) \in P \qquad \forall\, x \in A$$

چون P یک ایدآل اول است پس $D^k(b) \in P$. بنابراین با استقرا ثابت شد به‌ازای هر k، $D^k(b) \in P$ پس $b \in P'$ و حکم ثابت می‌شود. □

تعریف ۱۹.۶.۱ .
حلقهٔ R را با مشخصهٔ n گویند اگر n کوچکترین عدد طبیعی باشد که به ازای هر $x \in R$، $nx = 0$.

قضیه ۲۰.۶.۱ .
فرض کنید A یک حلقهٔ اول با مشخصهٔ مخالف ۲ ، ۳ و ۵ و D یک اشتقاق روی A باشد به قسمیکه به‌ازای هر $a \in A$، $[a, [a, [a, Da]]] \in Z(A)$. آنگاه $D = 0$ یا A جابجائی است.

اثبات.
ر. ک. [۳۲] قضیهٔ ۲. □

۷.۱ فضای جداساز

تعریف ۱.۷.۱ .
اگر S یک تبدیل خطی از جبر باناخ X به جبر باناخ Y باشد و $\mathcal{S}(S)$ مجموعهٔ زیر باشد:

$$\mathcal{S}(S) = \{y \in Y | \exists (x_n) \subseteq X, x_n \to 0, Sx_n \to y\}$$

$\mathcal{S}(S)$ را فضای جداساز می‌نامند.

تعریف ۲.۷.۱ .
فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. ایدآل دوطرفهٔ J از A را ایدآل جداساز گوییم اگر به‌ازای هر دنبالهٔ $\{a_n\}$ در A یک عدد طبیعی N موجود باشد به قسمیکه به‌ازای هر $n \geq N$،

$$\overline{Ja_n \cdots a_1} = \overline{Ja_N \cdots a_1}$$

کیوساک [۱۳] نشان داد که فضای جداساز هر بروریختی و اشتقاق روی A یک ایدآل جداساز Aاست.

لم ۳.۷.۱ .
فرض کنید A یک جبر باناخ و $J \subseteq A$ یک ایدآل جداساز و $P \subseteq A$ یک ایدآل اول مینیمال باشد که حاوی J نباشد. در اینصورت P بسته است.

اثبات.
ر. ک. [۱۳] لم ۲.۳. □

لم ۴.۷.۱ .
فرض کنید S یک تبدیل خطی از فضای X به توی فضای باناخ Y و R یک تبدیل خطی پیوسته از Y به فضای باناخ Z باشد. احکام زیر برقرارند:

(الف) $\mathcal{S}(S)$ یک زیرفضای بستهٔ Y است.

(ب) S پیوسته است اگر و تنها اگر $\mathcal{S}(S) = \{0\}$.

(ج) RS پیوسته است اگر و تنها اگر $RS(S) = \{0\}$.

(د) $\overline{R(\mathcal{S}(S))} = \mathcal{S}(RS)$.

(ه) عدد ثابت M(مستقل از R و Z) موجود است به قسمیکه اگر RS پیوسته باشد آنگاه $\|RS\| \leq M\|R\|$.

(و) اگر T و R عملگرهای خطی پیوسته روی X و Y باشند و $ST = RS$ آنگاه $R(\mathcal{S}(S)) \subseteq \mathcal{S}(S)$.

اثبات.
ر. ک. [۴۴] لم ۱.۲. □

فصل ۲

قضیه و حدس سینگر- ورمر برای جبرهای باناخ جابجایی

برد اشتقاقها روی جبرهای باناخ اولین بار توسط سینگر و ورمر در سال ۱۹۵۵ [۴۵] بررسی شد. سینگر و ورمر نشان دادند که برد هر اشتقاق پیوسته(کراندار) روی جبرهای باناخ جابجائی داخل رادیکال آن قرار می گیرد. همچنین آنها در آن مقاله حدس زدند که شرط پیوستگی لازم نیست. این مطلب به نام حدس سینگر- ورمر معروف شد. یکی از راههای بررسی این حدس این بود که جبرهایی پیدا کنند که اشتقاقهای روی آنها خودبخود پیوسته باشد. در نتیجه بنا بر قضیهٔ سینگر- ورمر برد اشتقاقهای روی این جبرهای باناخ داخل رادیکال قرار میگیرد. این مطلب باعث ایجاد شاخهٔ جدیدی بنام پیوستگی خودکار در آنالیز تابعی شد. این شاخه بررسی میکند که چه شرایطی روی جبرهای باناخ A, B ایجاب میکند که تبدیل خطی $T : A \to B$ پیوسته شود. در سال ۱۹۶۹ جانسون [۱۷]نشان داد که هر اشتقاق روی جبرهای باناخ نیمساده پیوسته است.در نتیجه او ثابت کرد حدس سینگر- ورمر برای جبرهای باناخ نیمساده برقرار است. در سال ۱۹۸۲ خسروی [۲۰] نشان داد برد اشتقاقهائی که به ازای یک عدد طبیعی n، D^n پیوسته باشد داخل رادیکال قرار می‌گیرد. بالاخره در سال ۱۹۸۸ توماس [۴۶]حدس سینگر- ورمر را ثابت کرد. در این فصل ابتدا قضیهٔ سینگر- ورمر را بیان و ثابت می کنیم. سپس قضایای جانسون را ارائه نموده و در نهایت اثبات توماس برای حدس سینگر- ورمر را می آوریم. در این فصل A را یک جبر باناخ جابجائی مختلط در نظر می‌گیریم، مگر آنکه خلاف آن تصریح شود.

۱.۲ قضیهٔ سینگر- ورمر

قضیهٔ سینگر- ورمر در سال ۱۹۵۵ توسط سینگر و ورمر[۴۵]ثابت شد. بعداً سینکلر اثبات ساده تری برای این قضیه ارائه کرد. در اینجا اثبات سینکلر را می آوریم. برای اثبات سینگر و ورمرعلاوه بر مرجع فوق میتوانید به [۴]مراجعه کنید. همچنین در سال ۱۹۷۸ پتاک اثبات دیگری برای این قضیه ارائه کرد[۳۴].

قضیه ۱.۱.۲ . (سینگر- ورمر ۱۹۵۵)
فرض کنید A یک جبر باناخ جابجائی مختلط و D یک اشتقاق پیوسته(کراندار) روی A باشد. آنگاه $D(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$.

اثبات.
فرض کنید $x \in ker\phi$ و $x = a - \phi(a), \phi \in \Phi_A, a \in A$. داریم

$$D(x) = D(a - \phi(a)) = D(a) - D(\phi(a)) = D(a) + \phi(a)D(۱) = D(a) \qquad (۱.۲)$$

چون $P = ker\phi$ یک ایدآل دوطرفهٔ A است بنابر لم ۱.۶.۱۵

$$D^n(x^n) + P = n!D(x)^n + P \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

بنابراین چون $\phi(P) = \{۰\}$ داریم

$$\phi(D^n(x^n)) = n!\phi(D(x)^n)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} |\phi(D(x))| &= |\phi(D(x)^n)|^{۱/n} \\ &= \left|\tfrac{۱}{n!}\phi(D^n(x^n))\right|^{۱/n} \\ &= (n!)^{-۱/n}\,|\phi(D^n(x^n))|^{۱/n} \\ &\leq \|D\|\|x\|(n!)^{-۱/n} \end{aligned}$$

چون آخرین عبارت وقتی $n \to \infty$ به سمت صفر میل میکند پس $|\phi(D(x))| = ۰$. حال بنابر۱.۲ $\phi(D(a)) = ۰$. پس $D(a) \in ker\phi$. چون ϕ دلخواه است پس $D(a) \in \bigcap_{\phi \in \Phi_A} ker\phi = \mathsf{rad}(A)$.
□

نتیجه ۲.۱.۲.
هیچ اشتقاق پیوستهٔ ناصفر روی یک جبر باناخ جابجائی مختلط نیمساده وجود ندارد.

حال اثبات جانسون برای حدس سینگر- ورمر روی جبرهای باناخ نیمساده را میآوریم.
قبل از اثبات به چند لم نیاز داریم.

لم ۳.۱.۲.
فرض کنید $\phi_۱, \ldots, \phi_n$ عناصر متمایز Φ_A باشند. آنگاه نگاشت

$$\begin{aligned} T: \quad A &\to \quad \mathbb{C}^n \\ a &\to \quad (\phi_۱(a), \ldots, \phi_n(a)) \end{aligned}$$

A را بروی $\mathbb{C}^n$ مینگارد(به عبارت دیگر T بروست).

اثبات.
ر.ک. [۴] لم ۱۸.۱۷ یا [۱۷]. □

لم ۴.۱.۲.
فرض کنید$\{\phi_n\}$ یک دنباله از عناصر متمایز Φ_A باشد و $k \in \mathbb{N}$. آنگاه $y_k \in A$ موجود است بهقسمیکه

$$\begin{aligned} \phi_i(y_k) &= ۰ \quad ۱ \leq i \leq k-۱ \\ \phi_i(y_k) &\neq ۰ \qquad i \geq k \end{aligned}$$

اثبات.
ر.ک. [۴] لم ۱۸.۱۹. □

تعریف ۵.۱.۲.
فرض کنید $\mathcal{F}$ جبر تمام توابع مختلط روی Φ_A باشد. گوییم D یک اشتقاق از A به $\mathcal{F}$ است اگر D خطی باشد وبه‌ازای هر $a, b \in A$ و هر $\phi \in \Phi_A$،

$$[D(ab)](\phi) = \phi(a)(D(b))(\phi) + \phi(b)(D(a))(\phi).$$

متناظر با هر اشتقاق D روی A می‌توان یک اشتقاق از A به $\hat{A} \subseteq \mathcal{F}$ بصورت زیر تعریف کرد.

$$\begin{array}{rll} D': & A \to & \mathcal{F} \\ & x \to & (D(x))\hat{} \end{array}$$

براحتی میتوان نشان داد که D' یک اشتقاق از A به $\hat{A} = \{\hat{a} : a \in A\}$ است.

قضیه ۶.۱.۲.
فرض کنید D یک اشتقاق از A به $\mathcal{F}$ باشد. اگر تابعک خطی $x \to D(x)(\phi)$ روی A به‌ازای تعداد نامتناهی عضو ϕ از Φ_A ناپیوسته باشد آنگاه $x \in A$ موجود است به قسمیکه $D(x)$ یک تابع بیکران است.

اثبات.
ر. ک. [۱۷] قضیهٔ ۱. □

نتیجه ۷.۱.۲.
اگر D یک اشتقاق از A به $\hat{A}$ باشد آنگاه D پیوسته است. بالاخص اگر D یک اشتقاق در A باشد آنگاه $x \to (D(x))\hat{}$ پیوسته است.

نتیجه ۸.۱.۲.
فرض کنید D یک اشتقاق روی A باشد. آنگاه مجموعهٔ $\{\phi \in \Phi_A | D'(\phi) \notin A'\}$ متناهی است(منظور از A' دوگان A است).

اثبات.
با توجه به نتیجهٔ فوق بدیهی است. □

قضیه ۹.۱.۲. (جانسون ۱۹۶۹)[۱۷]
اگر A یک جبرباناخ جابجائی نیمساده باشد آنگاه هر اشتقاق روی A پیوسته است.

اثبات.
فرض کنید D یک اشتقاق روی A باشد. همچنین فرض کنید $x_n, y \in A$ بطوریکه

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \circ, \lim_{n\to\infty} D(x_n) = y$$

بنابر قضیهٔ نمودار بسته [ر.ک. [۱۰] III.12.7] کافی است ثابت کنیم $y = \circ$.
برای اثبات این مطلب کافی است نشان دهیم به‌ازای هر $\phi \in \Phi_A$ ، $\phi(y) = \circ$ (زیرا A نیمساده است).اگر $D'\phi$ (یا $D(x)\hat{}$)در ϕ پیوسته باشد آنگاه

$$\phi(y) = \lim_{n\to\infty} \phi(D(x_n)) = \lim_{n\to\infty} D'\phi(x_n) = \circ$$

در غیر اینصورت بنابر نتیجهٔ ۲.۱.۸ $\{\phi \in \Phi_A | D'(\phi) \notin A'\}$ متناهی است. پس فرض کنید $\phi_1, \ldots, \phi_n$ عناصر متمایز این مجموعه باشند. بنابر لم ۲.۱.۳ $z \in A$ موجود است به قسمیکه $\phi_1(z) = 1$ و به‌ازای $j = 2, \ldots, n$ ، $\phi_j(z) = 0$ (زیرا $(1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n$)
ادّعا: به‌ازای هر $j = 1, 2, \ldots, n$ ، $\phi_j(y) = 0$
(فرض خلف) فرض کنید $\phi_1(y) \neq 0$. e را بصورت زیر درنظر می‌گیریم

$$e = \phi_1(y)^{-1} yz.$$

داریم

$$\phi_1(e) = \phi_1(\phi_1(y)^{-1} yz) = \phi_1(y)^{-1} \phi_1(y) \phi_1(z) = \phi_1(z) = 1 \qquad (2.2)$$

پس $\phi_1(e) = 1$.
بطریق مشابه ثابت میشود که به‌ازای هر $\phi \in \Phi_A - \{\phi_1\}$ ، $\phi(e) = 0$ بنابراین

$$\phi(xe - \phi_1(x)e) = 0 \qquad \forall \phi \in \Phi_A$$

حال چون A نیمساده است پس $\bigcap_{\phi \in \Phi_A} ker\phi = \{0\}$. بنابراین $xe - \phi_1(x)e = 0$. درنتیجه $xe = \phi_1(x)e$.
با جاگذاری $x = e$ داریم $e^2 = \phi_1(e)e = e$. بنابراین $D(e) = 0$. بنابراین به‌ازای هر x در A

$$(D(x))e = D(xe) - xD(e) = D(xe) = D(\phi_1(x)e) = \phi_1(x)D(e) = 0$$

پس

$$ye = \lim_{n \to \infty} (D(x_n))e = \lim_{n \to \infty} (D(x_n)e) = 0$$

امّا

$$e = e^2 = \phi_1(y)^{-1} yze = (ye)(\phi_1(y)^{-1} z) = 0$$

و این با $\phi_1(e) = 1$ متناقض است. پس $\phi_1(y) = 0$.
با استدلال مشابه ثابت میشود $j = 2, \ldots, n$, $\phi_j(y) = 0$. بنابر این به‌ازای هر $\phi \in \Phi_A$ ، $\phi(y) = 0$ پس $y = 0$. □
چون شرط نیمسادگی با شرط «Φ_A نقاط A را جدا میکند» معادل است، اگر Φ_A نقاط A را جدا کند و D یک اشتقاق در A باشد آنگاه D پیوسته است(جانسون ۱۹۶۹)

نتیجه ۲.۱.۱۰.

صفر تنها اشتقاق روی جبرهای باناخ نیمساده است.

در سال ۱۹۸۲ خسروی [۲۰] قضیهٔ زیر را ثابت کرد.

قضیه ۲.۱.۱۱.

اگر D یک اشتقاق روی جبر باناخ جابجائی A و به‌ازای یک عدد طبیعی n ، D^n پیوسته باشد آنگاه $D(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$.

اثبات.
ر. ک. [۲۰] قضیهٔ ۳. □

قضیه ۱۲.۱.۲ .
فرض کنید A یک جبر باناخ جابجائی و D یک اشتقاق روی A باشد. عناصر خودتوان متعامد $e_{\circ},\ldots,e_n$ با مجموع ۱ در A وجود دارد بطوریکه برد $D|_{e_{\circ}A}$ داخل رادیکال $e_{\circ}A$ قرار میگیردو هر جبر $e_{۱}A,\ldots,e_nA$ دارای ایدآل ماکسیمال منحصربفرد است.

اثبات.
ر. ک. [۱۷]. □

حال آمادگی داریم تا اثبات توماس برای حدس سینگر- ورمر را بیان کنیم.
فرض کنید A یک جبر باناخ جابجائی و D یک اشتقاق روی A باشد. بنابر قضیهٔ ۲.۱.۱۲ برد D داخل رادیکال قرار میگیرد یا یک مجموعهٔ متناهی غیرتهی از عناصر خودتوان متعامد $\{e_{۱},e_{۲},\ldots,e_n\}$ موجود است بطوریکه

الف) اگر $A_{\circ}=(۱-e_{۱}-e_{۲}-\cdots-e_n)A$ و $\mathcal{R}_{\circ}$ رادیکال $A_{\circ}$ باشد آنگاه $D(A_{\circ})\subseteq\mathcal{R}_{\circ}$

ب) هر e_iA $(i=۱,۲,\ldots,n)$ یک جبر باناخ رادیکال(جابجائی) با یکهٔ الحاق شدهٔ e_i میباشد و بهازای $i=۱,\ldots,n$ ، $D(e_iA)\subseteq e_iA$ زیرا بهازای هر $a\in A$ داریم $D(e_ia)=(De_i)a+e_iDa=$ $.e_iDa\in e_iA$

توجه کنید که فقط یکی از دو حالت برقرار است زیرا اگر برد D داخل رادیکال قرار گیرد در قضیهٔ ۲.۱.۱۲ کافی است $e_{\circ}=۱$ اختیار شود. بنابر این مجموعهٔ متعامد موردنظر در قسمت ب تهی است.

بنابراین برای اثبات صحت حدس کافی است ثابت کنیم برد هر اشتقاق روی یک جبرباناخ رادیکال جابجائی یکدار شده داخل ایدآل ماکسیمال منحصربفرد آن که در حقیقت همان رادیکال آن جبر است قرار میگیرد زیرا در صورت ثابت شدن این حکم داریم بهازای هر $i=۱,\ldots,n$، $D(e_iA)\subseteq \mathrm{rad}(e_iA)$ در نتیجه

$$\begin{aligned} D(A) &= D(e_{\circ}A)+D(e_{۱}A)+\cdots+D(e_nA)\\ &\subseteq \mathrm{rad}(e_{\circ}A)+\cdots+\mathrm{rad}(e_nA)\\ &\subseteq \mathrm{rad}(A)\end{aligned}$$

برای اثبات حدس از فرض خلف استفاده میکنیم.
فرض کنید $\mathcal{R}$ یک جبر باناخ رادیکال جابجائی و $\mathcal{R}^{\#}$ یکدار شدهٔ $\mathcal{R}$ باشد(یعنی $\mathcal{R}^{\#}=\mathbb{C}\oplus\mathcal{R}$).
همچنین فرض کنید D یک اشتقاق روی $\mathcal{R}^{\#}$ باشد بطوریکه $D(\mathcal{R}^{\#})\not\subseteq\mathcal{R}$.
بهازای هر $(a,\lambda)\in\mathcal{R}^{\#}$ داریم $(a,\lambda)=(a,\circ)+\lambda(\circ,۱)$ پس

$$D(a,\lambda)=D(a,\circ)+\lambda D(\circ,۱)=D(a,\circ)$$

بنابر این $z\in\mathcal{R}$ موجود است بطوریکه $D(z)\notin\mathcal{R}$. در نتیجه

$$D(z)\in\mathcal{R}^{\#}\backslash\mathcal{R}\Rightarrow D(z)=(a,\lambda)\ \ a\in\mathcal{R},\quad \lambda\neq\circ$$

چون $a\in\mathcal{R}$ ، پس شبه پوچتوان است در نتیجه $D(z)=a+\lambda۱$ وارونپذیر است.
بنابراین اگر D را با $(D(z))^{-۱}D$ جایگزین کنیم ، اشتقاق حاصل z را به ۱ مینگارد. بنابراین بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد شود فرض میکنیم $D(z)=۱$.
در ادامهٔ فصل (با استفاده از نمادهای فوق) فرض کنید D یک اشتقاق روی $\mathcal{R}^{\#}$ باشد و $D(z)=۱$. z را تا پایان فصل ثابت در نظر میگیریم. توجه کنید که چون برد D داخل رادیکال قرار نمیگیرد پس D بیکران(ناپیوسته) است. برای اثبات قضیه به یک سری پیشنیازها نیاز داریم که ابتدا بیان میکنیم.

تعریف ۱۳.۱.۲ .
فرض کنید X یک فضای باناخ و T یک عملگر خطی پیوسته روی X باشد. زیرفضای $\mathcal{D} \subset X$ را T- تقسیمپذیر گوئیم اگر به‌ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$،

$$(T-\lambda)\mathcal{D} = \mathcal{D}.$$

در بین تمام زیرفضاهای T- تقسیمپذیر ، یکی از همه بزرگتر است. این زیرفضا، زیرفضای تولیدشدهٔ خطی توسط اجتماع تمام زیرفضاهای T- تقسیمپذیر است.

لم ۱۴.۱.۲ .
فرض کنید X یک فضای باناخ و $\lambda \in \partial(\sigma(T))$ آنگاه $(T-\lambda I)X \neq X$. ($\sigma(T)$ طیف T و $\partial\sigma(T)$ مرز آن است)

اثبات.
ر. ک. [۱۹] لم ۲.۲. □

قضیه ۱۵.۱.۲ .
یک زیر فضای تقسیمپذیر بسته نیست مگر آنکه‌بدیهی($\{0\}$) باشد.

اثبات.
(فرض خلف) فرض کنید $\mathcal{D}$ یک فضای T- تقسیمپذیر بستهٔ نابدیهی باشد. چون $\mathcal{D} \neq \{0\}$ پس $\partial\sigma(T|\mathcal{D}) \neq \emptyset$(منظور از $\sigma(T|\mathcal{D})$ مجموعهٔ تمام اسکالرهای λ است که $T-\lambda I$ یک نگاشت یک به یک و پوشا روی $\mathcal{D}$ نیست). فرض کنید $\lambda \in \partial\sigma(T|\mathcal{D})$. بنابر لم فوق $(T-\lambda I)\mathcal{D} \neq \mathcal{D}$ و این با T- تقسیمپذیری $\mathcal{D}$ متناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. □

در اینجا با Xهایی کار می‌کنیم که یک جبر باناخ جابجائی و T عملگر ضرب در یک عنصر ثابت این جبر است. با این فرضها تعریف فوق را می‌توان بصورت زیر نوشت.

تعریف ۱۶.۱.۲ .
فرض کنید a عضوی از جبر باناخ جابجائی A باشد. زیرفضای $\mathcal{D}$ از A را a- تقسیمپذیر گویند‌اگر به‌ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$،

$$(\lambda - a)\mathcal{D} = \mathcal{D}.$$

بزرگترین زیرفضای a- تقسیمپذیر را با $\mathcal{D}_a$ نمایش می‌دهیم.

توجه کنید که $\mathcal{D}_a$ نسبت به رابطهٔ $\mathcal{D} = (a-\lambda)\mathcal{D}$ ماکسیمال است ($\lambda \in \mathbb{C}$). نشان می‌دهیم که کافی است $\mathcal{D}_a$ به‌ازای هر $\lambda \in \sigma(a)$ نسبت به رابطهٔ فوق ماکسیمال باشد. برای این منظور کافی است نشان دهیم اگر به‌ازای هر $\lambda \in \sigma(a)$، رابطهٔ $(a-\lambda)\mathcal{D}_a = \mathcal{D}_a$ برقرار باشد آنگاه به‌ازای هر $\mu \in \sigma(a)^C$(منظور متمّم $\sigma(a)$ است) رابطهٔ $(a-\mu)\mathcal{D}_a = \mathcal{D}_a$ برقرار است.

چون $\mu \in \sigma(a)^C$ پس $a-\mu$ وارونپذیر است. به‌ازای هر $\lambda \in \sigma(a)$ داریم

$$\begin{aligned}(a-\lambda)(a-\mu)^{-1}\mathcal{D}_a &= (a-\mu)^{-1}(a-\lambda)\mathcal{D}_a\\ &= (a-\mu)^{-1}\mathcal{D}_a\end{aligned}$$

پس $(a-\mu)^{-1}\mathcal{D}_a \subseteq \mathcal{D}_a$. بطریق مشابه $(a-\mu)\mathcal{D}_a \subseteq \mathcal{D}_a$. بنابراین

$$\mathcal{D}_a \subseteq (a-\mu)(a-\mu)^{-1}\mathcal{D}_a \subseteq (a-\mu)\mathcal{D}_a \subseteq \mathcal{D}_a$$

در نتیجه $(a-\mu)\mathcal{D}_a = \mathcal{D}_a$.

چون z شبه پوچتوان است بوضوح $\mathcal{D}_z$ بزرگترین زیرفضای $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}^{\#}$ است بطوریکه $z\mathcal{D} = \mathcal{D}$.

لم ۱۷.۱.۲ .
$\mathcal{D}_z$ یک ایدآل $\mathcal{R}^{\#}$ است.

اثبات.
به‌ازای هر $t \in \mathcal{R}^{\#}$ داریم
$$a(t\mathcal{D}_a) = t(a\mathcal{D}_a) = t\mathcal{D}_a$$
پس $t\mathcal{D}_a$، a- تقسیمپذیر است. پس $t\mathcal{D}_a \subseteq \mathcal{D}_a$. بنابراین $\mathcal{D}_a$یک ایدآل $\mathcal{R}^{\#}$ است. □

لم ۱۸.۱.۲ .
فرض کنید A یک جبر باناخ جابجائی باشد. آنگاه به‌ازای هر $a \in A$ ، $\mathcal{D}_a \subseteq \mathrm{rad}(A)$.

اثبات.
فرض کنید d عضو دلخواهی از $\mathcal{D}_a$ و ϕ عضو دلخواهی از Φ_A و $\phi(a) = \lambda \in \mathbb{C}$ باشد. داریم $(a-\lambda)\mathcal{D}_a = \mathcal{D}_a$ و چون $d \in \mathcal{D}_a$ پس عضو $e \in \mathcal{D}_a$ موجود است به قسمیکه $d = (a-\lambda)e$. بنابر این با تأثیر دادن ϕ بر طرفین تساوی داریم
$$\phi(d) = \phi((a-\lambda)e) = (\phi(a)-\lambda)\phi(e) = 0$$
پس $d \in ker\phi$. چون ϕ دلخواه است پس $d \in \bigcap_{\phi\in\Phi_A} ker\phi = \mathrm{rad}(A)$. چون d عضو دلخواهی از $\mathcal{D}_a$ است پس $\mathcal{D}_a \subseteq \mathrm{rad}(A)$. □

بنابر لم ۲.۱.۱۷ $\mathcal{D}_z$ یک ایدآل $\mathcal{R}^{\#}$ است پس $\overline{\mathcal{D}_z}$ ایدآل بستهٔ $\mathcal{R}^{\#}$ است. همچنین $\mathcal{D}_z \subseteq \mathcal{R}$ و اگر $\mathcal{D}_z$ نابدیهی باشد آنگاه بسته نیست.

قضیه ۱۹.۱.۲ . (میتاگ -لفلر)
فرض کنید $\{T_n\}$ یک دنبالهٔ شمارشپذیر از توابع خطی پیوستهٔ جابجاگر باشد. اگر E بزرگترین زیرفضای T_n- تقسیمپذیر و F یک زیر فضای بستهٔ ماکسیمال باشد بطوریکه به‌ازای هر n، $\overline{T_nF} = F$ آنگاه $\overline{E} = F$.

اثبات.
ر. ک. [۱۴] قضیهٔ ۵.۳. □

تعریف ۲۰.۱.۲ .
فرض کنید a عضوی از جبر باناخ A باشد.گوییم a با کاهش بستهٔ متناهی است اگر به‌ازای برخی $n \in \mathbb{N}$, $a^n \in \overline{Aa^{n+1}}$.

این عناصر اولین بار توسط آلان [۱] معرفی و جهت توسیع جبر سریهای توانی صوری روی $\mathbb{C}$ به یک جبر باناخ استفاده شدند.

قضیه ۲۱.۱.۲ .
فرض کنید A یک جبر باناخ جابجائی و a یک عضو شبه پوچتوان A باشد. احکام زیر معادلند:
الف) $a^n \in \overline{a^{n+1}A}$ (یعنی a از کاهش بستهٔ متناهی n است)
ب) $a^n \in \overline{a\overline{a^nA}}$
ج) $a^n \in \overline{\mathcal{D}_a}$

اثبات.
(الف⇐ ب)
داریم $a^{n+1}A = aa^nA \subseteq a\overline{a^nA}$. در نتیجه $\overline{a^{n+1}A} \subseteq \overline{a\overline{a^nA}}$ پس حکم بدیهی است.
(ب ⇐ ج)
چون $a^n \in \overline{a\overline{a^nA}}$ پس $\overline{a\overline{a^nA}} = \overline{a^nA}$. فرض کنید T عملگر ضرب در a باشد و $F = \overline{a^nA}$.
داریم

$$\overline{TF} = \overline{a\overline{a^nA}} = \overline{a^nA} = F$$

بنابر قضیهٔ میتاگ- لفلر $\overline{\mathcal{D}_a} = F = \overline{a^nA} = \overline{a\overline{a^nA}}$.
پس حکم برقرار است.
(ج ⇐ الف)
چون $\overline{\mathcal{D}_a} = \overline{a^{n+1}\mathcal{D}_a} \subset \overline{a^{n+1}A}$ حکم بدیهی است. □

لم ۲۲.۱.۲.

$$\mathcal{D}_z = \bigcap_{m=1}^{\infty} z^m\mathcal{R}$$

اثبات.
چون $\bigcap_{m=1}^{\infty} z^m\mathcal{R}$، z- تقسیمپذیر است پس بوضوح $\bigcap_{m=1}^{\infty} z^m\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}_z$. از طرف دیگر چون به‌ازای هر m، $z^m\mathcal{D}_z = \mathcal{D}_z$.پس $\mathcal{D}_z = z^m\mathcal{D}_z \subseteq z^m\mathcal{R}$. پس $\mathcal{D}_z \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} z^m\mathcal{R}$. بنابراین $\mathcal{D}_z = \bigcap_{m=1}^{\infty} z^m\mathcal{R}$. □

لم ۲۳.۱.۲.
z پوچتوان نیست و $D(\mathcal{D}_z) \subseteq \mathcal{D}_z$.

اثبات.
چون $D^2(z) = D(D(z)) = D(1) = 0$ پس بنابر قضیهٔ ۱.۶.۷ (ج) به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$D^n(z^n) = n!D(z)^n = n!1 \neq 0$$

پس $z^n \neq 0$. بنابراین z پوچتوان نیست.
برای اثبات قسمت دوم به‌ازای هر $n = 1, 2, \ldots$ داریم

$$\begin{aligned} D(z^n\mathcal{R}) &\subseteq D(z^n)\mathcal{R} + z^nD(\mathcal{R}) \\ &\subseteq nz^{n-1}\mathcal{R} + z^nD(\mathcal{R}) \\ &\subseteq z^{n-1}\mathcal{R} + z^nD(\mathcal{R}) \\ &\subseteq z^{n-1}\mathcal{R} \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

زیرا $z \in \mathcal{R}$ و $\mathcal{R}$ یک ایدآل $\mathcal{R}^\#$ است در نتیجه

$$z^nD(\mathcal{R}) = z^{n-1}(zD(\mathcal{R})) \subseteq z^{n-1}\mathcal{R}$$

. بنابر لم فوق

$$\begin{aligned} D(\mathcal{D}_z) &= D(\textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty} z^n\mathcal{R}) \\ &\subseteq \textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty} D(z^n\mathcal{R}) \\ &\subseteq \textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty} z^{n-1}\mathcal{R} \\ &\subseteq \textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty} z^n\mathcal{R} \\ &= \mathcal{D}_z \end{aligned} \tag{۴.۲}$$

و حکم اثبات می‌شود. □

قضیه ۲۴.۱.۲.
عدد $m_\circ \in \mathbb{N}$ موجود است به قسمیکه z از کاهش بستهٔ متناهیِ $m_\circ$ است. بعلاوه $\overline{z^{m_\circ}\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{D}_z}$.

اثبات.
ر. ک. [۴۶]قضیهٔ ۲.۱۰. □

قضیه ۲۵.۱.۲.
فرض کنید $s_1, s_2, \ldots, s_{m_\circ+1}$ عناصر $\mathcal{R}$ باشند به گونه‌ای که در شرایط زیر صدق کنند:
۱) $z^{m_\circ}$ هر ضرب دوتائی $s_i s_j, i < j$ را در $\mathcal{R}^\#$ عاد کند.
۲) $z^{2m_\circ}$ هر ضرب سه‌تائی $s_i s_j s_m, i < j < m$ را در $\mathcal{R}^\#$ عاد کند.

$$\vdots$$

$m_\circ$) $z^{m_\circ^2}$ ضرب $m_\circ + 1$ تائی $s_1 s_2 \cdots s_{m_\circ+1}$ را در $\mathcal{R}^\#$ عاد کند.
آنگاه به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, m_\circ + 1$، $c_i \in \mathcal{R}^\#$ موجود است به قسمیکه

$$\prod_{i=1}^{m_\circ+1} (s_i - z^{m_\circ} c_i) \in \mathcal{D}_z.$$

اثبات.
ر. ک. [۴۶] قضیهٔ ۲.۲۵. □

۲.۲ دستگاه متمرد

حال دستگاه s- متمرد با k عضو را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.
تعریف ۱.۲.۲ .
فرض کنید s یک عضو غیر پوچتوان $\mathcal{R}$ باشد و $k \in \mathbb{N}$. یک دستگاه s- متمرد با k عضو عبارتست از مجموعهٔ k عضوی $\{s_۱, s_۲, \dots, s_k\}$ از عناصر $\overline{s\mathcal{R}}$ که در شرایط زیر صدق کنند:
الف)
۱) s هر ضرب دوتائی متمایز $i < j, s_is_j$ را در $\mathcal{R}^\#$ عاد کند.
۲) $s^۲$ هر ضرب سه‌تائی متمایز $i < j < m, s_is_js_m$ را در $\mathcal{R}^\#$ عاد کند.

$$\vdots$$

$(k-۱$) $s^{k-۱}$ ضرب k تائی $s_۱s_۲\cdots s_k$ را در $\mathcal{R}^\#$ عاد کند.
ب) به‌ازای هر $i = ۱, ۲, \dots, m_۰ + ۱ \quad , \quad c_i \in \mathcal{R}^\#$ موجود باشد به قسمیکه

$$\sup_n \frac{\left\|\prod_{i=۱}^k (s_i - sc_i)^n\right\|^{۱/n}}{\|s^{kn}\|^{۱/n}} = +\infty.$$

توجه.
از خاصیت (ب) نتیجه میشود که $\prod_{i=۱}^k (s_i - sc_i) \notin s^k\mathcal{R}^\#$ زیرا درغیر اینصورت

$$\prod_{i=۱}^k (s_i - sc_i) = s^k a \quad , a \in \mathcal{R}^\#$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \sup_n \frac{\|\prod_{i=۱}^k (s_i - sc_i)^n\|^{۱/n}}{\|s^{kn}\|^{۱/n}} &= \sup_n \frac{\|(s^{kn}a^n\|^{۱/n}}{\|s^{kn}\|^{۱/n}} \\ &\leq \sup_n \|a^n\|^{۱/n} \\ &= r(a) \\ &< +\infty \end{aligned} \tag{۵.۲}$$

در ادامهٔ این فصل فرض می‌کنیم $s \in \overline{s\mathcal{R}}, s \in \mathcal{R}$ و s غیر پوچتوان باشد. نشان می‌دهیم که با فرض فوق به‌ازای هر $k \in \mathbb{N}$ دستگاه s- متمرد با k عضو موجود است. بعلاوه این دستگاه را می‌توان بگونه‌ای ساخت که در هر همسایگی مبدأ قرار گیرد.
برای ساختن این دستگاه از خاصیت جبرهای باناخ و خاصیت رادیکال استفاده میکنیم.
بنابر فرض، $s \in \overline{s\mathcal{R}}$ پس دنبالهٔ $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ در $\mathcal{R}$ موجود است به قسمیکه $\lim\limits_{\alpha\to\infty} e_\alpha s = s$. در حالت کلی دنبالهٔ $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ را نمی‌توان کراندار در نظر گرفت. حال اگر $\lambda \in \mathbb{C} - \{۰\}$ آنگاه

$$\lim_{\alpha\to\infty} (\lambda + (۱-\lambda)e_\alpha)s = s$$

مزیت کار کردن با $(\lambda \neq ۰), \lambda + (۱-\lambda)e_\alpha$ این است که یکال (وارونپذیر) است زیرا e_α و در نتیجه $(۱-\lambda)e_\alpha$ شبه پوچتوان است.
حال یک دستگاه s- متمرد می‌سازیم.

برای ساختن یک دستگاه متمرد ابتدا مقادیر λ را مشخص می‌کنیم. سپس به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, k$، s_i را حاصلضرب s در یک حاصلضرب نامتناهی مناسب از یکالهایی به شکل فوق در نظر می‌گیریم. پس به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, k$، k دنبالهٔ ثابت $\{\lambda_{ij}\}_{j=۱}^{\infty}$ را به گونه ای انتخاب می‌کنیم که به‌ازای هر $i = ۱, ۲, \ldots, k$،

$$\lim_{j\to\infty} |\lambda_{i۱}\lambda_{i۲}\cdots\lambda_{ij}| = +\infty \qquad (۶.۲)$$

سپس نیاز داریم که k دنباله از یکالها $\{u_{ij}\}_{j=۱}^{\infty}, (i = ۱, ۲, \ldots, k)$,

$$u_{ij} = (\lambda_{ij} + (۱ - \lambda_{ij})e_{\alpha_{ij}})$$

انتخاب کنیم. α_{ij} در $\mathbb{N}$ به گونه ای اختیار میشود که u_{ij} در شرایط موردنظر صدق کند. سپس نشان می‌دهیم به‌ازای هر $i = ۱, ۲, \ldots, k$ ، $s_i = \lim_{j\to\infty} su_{i۱}u_{i۲}\cdots u_{ij}$. توجه کنید که چون

$$\|su_{i۱}u_{i۲}\cdots u_{ij} - su_{i۱}u_{i۲}\cdots u_{i(j+۱)}\| \le \|u_{i۱}u_{i۲}\cdots u_{ij}\|\|s - su_{i(j+۱)}\|$$

و چون $\|s-su_{i(j+۱)}\|$ را می‌توان (با انتخاب $\alpha_{i(j+۱)}$ به اندازهٔ کافی بزرگ) به اندازهٔ دلخواه کوچک کرد، با انتخاب یکالهای u_{ij} بصورت استقرائی، همگرائی حد فوق حاصل می‌شود. حاصلضرب یکالهای $u_{i۱}u_{i۲}\cdots u_{ij}$ را با $\mu_{ij} + r_{ij}$ نمایش می‌دهیم که

$$(j \in \mathbb{N}, i = ۱, ۲, \ldots, k) r_{ij} \in \mathcal{R}, \mu_{ij} = \lambda_{i۱}\lambda_{i۲}\cdots\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$$

پس بنابر رابطهٔ ۶.۲ $\lim_{j\to\infty} |\mu_{ij}| = +\infty$. در قضیهٔ بعد یک دستگاه متمرد را به روش استقرائی می‌سازیم. بنابر عمومیّت روش ساخت بوضوح ممکن است دستگاههای متمرد متعددی موجود باشد.

قضیه ۲.۲.۲.

فرض کنید $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. می‌توان k دنباله از یکالهای $\{u_{۱j}\}_{j=۱}^{\infty}, \ldots, \{u_{kj}\}_{j=۱}^{\infty}$ در $\mathcal{R}^{\#}$ و یک دنباله از توانهای $\{n_j\}_{j=۱}^{\infty}$ در $\mathbb{N}$ اختیار کرد به قسمیکه در شرایط (الف)و(ب)و(ج)و(د) زیر صدق کنند:

(الف)

(۱) به‌ازای هر $i \in \{۱, ۲, \ldots, k\}$، دنباله‌های $\{su_{i۱}u_{i۲}\cdots u_{ij}\}_{j=۱}^{\infty}$ همگرا هستند.

(۲) به‌ازای هر $m, n \in \{۱, ۲, \ldots, k\}$، $m < n$، دنباله‌های دوتایی‌های متمایز

$$\{s(u_{m۱}u_{n۱})(u_{m۲}u_{n۲})\cdots(u_{mj}u_{nj})\}_{j=۱}^{\infty}$$

همگرا هستند.

$$\vdots$$

(k-۱) دنبالهٔ $\{s(u_{۱۱}u_{۲۱}\cdots u_{k۱})(u_{۱۲}u_{۲۲}\cdots u_{k۲})\cdots(u_{۱j}u_{۲j}\cdots u_{kj})\}_{j=۱}^{\infty}$ همگراست.

(ب) به‌ازای هر $i \in \{۱, ۲, \ldots, k\}$ و به‌ازای هر $j \in \mathbb{N}$،

$$\|s - su_{i۱}u_{i۲}\cdots u_{ij}\| < \frac{\epsilon}{۲}$$

(ج) به‌ازای هر $j \in \mathbb{N}$ شرط ذیل برقرار است.

اگر $n \geq n_j$ و $c_i \in \mathcal{R}^{\#}$ به قسمیکه به‌ازای هر k، $i = ۱, ۲, \ldots, k$، $|\mu_{ij}| \frac{۱}{۲} > \|c_i\|$ آنگاه

$$(۴ - ۱/j)^{-k} < \left(\prod_{i=۱}^{k} |\mu_{ij}|\right)^{-۱} \|s^{kn}\|^{-۱/n} \left\| \prod_{i=۱}^{k} ((su_{i۱}u_{i۲} \cdots u_{ij}) + sc_i)^n \right\|^{۱/n}$$

(د) *اگر $m, j \in \mathbb{N}$ و $m \geq j$ آنگاه شرط ذیل برقرار است:*
اگر $c_i \in \mathcal{R}^{\#}$ به قسمیکه به‌ازای هر k، $i = ۱, ۲, \ldots, k$، $|\mu_{ij}| \frac{۱}{۲} > \|c_i\|$ آنگاه

$$(۴ - ۱/m)^{-k} < \left(\prod_{i=۱}^{k} |\mu_{ij}|\right)^{-۱} \|s^{kn_j}\|^{-۱/n_j} \left\| \prod_{i=۱}^{k} ((su_{i۱}u_{i۲} \cdots u_{im}) + sc_i)^{n_j} \right\|^{۱/n_j}$$

اثبات.

ابتدا توضیحاتی در مورد علت بررسی این شرایط و شرح مختصری از ساختار استقرائی آن ارائه می‌کنیم.

شرط (الف) همان همگرائی است که برای تعریف s_iها(که مساوی $\lim_{j\to\infty} su_{i۱}u_{i۲} \cdots u_{ij}$ تعریف می‌شود)، $i = ۱, ۲, \ldots, k$، و برای اطمینان از اینکه حاصلضرب s_iهای متمایز بر توان مناسبی از s بخش پذیر است(شرط (الف) تعریف ۲.۲.۱) مورد نیاز است.

چون تعداد متناهی دنباله داریم و چون هیچکدام از u_{ij} در هیچ دنباله‌ای تکرار نمی‌شود ، اگر با یک ترتیب لغت‌نامه ای u_{mj} قبل از $(m < n)u_{nj}$ انتخاب شود آنگاه همگرائی براحتی برقرار می‌شود.

شرط (ب) یک کمک برای شرط (الف) است و ایجاب می‌کند که به‌ازای هر k، $i = ۱, ۲, \ldots, k$، s_i در یک همسایگی s به شعاع ϵ قرار می‌گیرد.

شرط (ج) جهت برقراری شرط (ب) از تعریف ۲.۲.۱ لازم است.(توجه کنید که $\prod_{i=۱}^{k} |\mu_{ij}|$ به سمت بینهایت میل می‌کند)

عدد طبیعی n_j بعد از انتخاب یکالهای $u_{kj}, \ldots, u_{۲j}, u_{۱j}$ انتخاب می‌شود. جهت تصدیق وجود n_jها به لم های (الف)، (ب)و(ج) زیر نیاز داریم

شرط (د) مکمل شرط (ج) است. این شرط ایجاب می‌کند که اگر یکالهای دیگری به حاصلضربهای جزئی $su_{i۱} \cdots u_{ij}$ اضافه شود و توان n_j استفاده شود شرط (ج) دوباره برقرار است. لم (د) زیر نشان می‌دهد که این خاصیت در صورتی برقرار است که تمام n_jهای قبلی، $j < m$، را هنگامیکه u_{im} انتخاب می‌شود، مشخص شود.

حال لم های کمکی زیر را اثبات می‌کنیم.

لم (الف)

فرض کنید $t \in \mathcal{R}$. عدد طبیعی N وابسته به t موجود است به قسمیکه شرط ذیل به‌ازای $n \geq N, n \in \mathbb{N}$ برقرار می‌باشد:

اگر $y \in \mathcal{R}^{\#}$ و $\|y\| < \frac{۱}{۲}$ آنگاه

$$\sum_{j=۰}^{\infty} \left\| \binom{-n}{j} (۱ + t)^{n+j} y^j \right\| < ۳^n.$$

اثبات.

فرض کنید ϵ یک عدد حقیقی مثبت باشد بطوریکه $\frac{۱}{۳} < (\frac{۱}{۲} - (۱ + \epsilon)^{-۱})$ (کافی است $\epsilon < \frac{۱}{۵}$ انتخاب شود). داریم

$$r(۱+t) \leq r(۱) + r(t) = r(۱) \leq ۱ < ۱+\epsilon \quad (\text{زیرا } ۱t = t۱ \text{ و } r(t) = ۰)$$

$$\Rightarrow r(۱+t) = \lim_{m\to\infty} \|(۱+t)^m\|^{۱/m} < ۱+\epsilon$$

پس به‌ازای N به اندازهٔ کافی بزرگ،

$$\|(۱+t)^N\|^{۱/N} < ۱+\epsilon \Rightarrow \|(۱+t)^N\| < (۱+\epsilon)^N$$

بسط دو جمله ای $(x+y)^{-n}$ ،$x, y \in \mathbb{R}, (x \neq ۰)$ در صورتی برقرار است که $|\frac{y}{x}| < ۱$. بنابراین

$$\begin{array}{rcl} \sum_{j=۰}^{\infty} \left\| \binom{-n}{j} (۱+t)^{n+j} y^j \right\| & \leq & \sum_{j=۰}^{\infty} \left| \binom{-n}{j} \right| (۱+\epsilon)^{n+j} ۲^{-j} \\ & = & \sum_{j=۰}^{\infty} \binom{-n}{j} \left((۱+\epsilon)^{-۱}\right)^{-n-j} (-\frac{۱}{۲})^j \\ & = & \left((۱+\epsilon)^{-۱} - \frac{۱}{۲}\right)^{-n} \\ & < & ۳^n. \end{array} \qquad (۷.۲)$$

□

لم (ب)

فرض کنید $j \in \mathbb{N}$ ثابت باشد و $\{u_{۱m}\}_{m=۱}^{j}, \{u_{۲m}\}_{m=۱}^{j}, \ldots, \{u_{km}\}_{m=۱}^{j}$ و $\{n_m\}_{m=۱}^{j-۱}$ برای $j \geq ۲$ انتخاب شده باشند. آنگاه $n_j \in \mathbb{N}$ موجوداست بطوریکه حکم زیر به‌ازای هر $n \geq n_j, n \in \mathbb{N}$ برقرار است:

اگر $i \in \{۱, ۲, \ldots, k\}$ و $c \in \mathcal{R}^{\#}$ و $\|c\| < \frac{۱}{۲}|\mu_{ij}|$ آنگاه

$$|\mu_{ij}|^n \| ((\mu_{ij} + r_{ij}) + c)^{-n} \| < ۳^n.$$

اثبات.

برای اثبات حکم کافی است به‌ازای هر $i \in \{۱, ۲, \ldots, k\}$، یک n_i بیابیم که در حکم صدق کند و سپس n_j را بزرگترین n_i در نظر بگیریم.

$i \in \{۱, ۲, \ldots, k\}$ را ثابت در نظر بگیرید. توجه کنید که اگر a و b عناصر جبر باناخ جابجائی باشند به قسمیکه a وارونپذیر و $n \in \mathbb{N}$، آنگاه در صورتیکه شعاع طیفی $\frac{b}{a}$ کمتر از ۱ باشد بسط دوجمله ای $(a+b)^{-n} = a^{-n}(۱+\frac{b}{a})^{-n}$ برقرار است. حال اگر $a = \frac{\mu_{ij}+r_{ij}}{\mu_{ij}}$ و $b = \frac{c}{\mu_{ij}}$ آنگاه

$$\begin{array}{rcl} r(\frac{b}{a}) & = & \lim_{n\to\infty} \|(\frac{b}{a})^n\|^{۱/n} \\ & = & \lim_{n\to\infty} \left\| \left(\frac{c}{\mu_{ij}+r_{ij}}\right)^n \right\|^{۱/n} \\ & \leq & \frac{\|c\|}{\|\mu_{ij}+r_{ij}\|} \\ & \leq & \frac{\frac{۱}{۲}|\mu_{ij}|}{|\mu_{ij}|+\|r_{ij}\|} \\ & \leq & \frac{۱}{۲} \end{array} \qquad (۸.۲)$$

داریم $\frac{r_{ij}}{\mu_{ij}} + ۱ = \frac{\mu_{ij}+r_{ij}}{\mu_{ij}}$، چون $\frac{r_{ij}}{\mu_{ij}}$ متعلق به رادیکال است پس شبه پوچتوان است یعنی $\sigma(\frac{r_{ij}}{\mu_{ij}}) = \{۰\}$ پس $\frac{r_{ij}}{\mu_{ij}} + ۱$ وارونپذیر است. فرض کنید p وارون آن باشد داریم

$$\left(\frac{\mu_{ij} + r_{ij}}{\mu_{ij}}\right) p = ۱ \Rightarrow (\mu_{ij} + r_{ij})p = \mu_{ij}$$

$$\mu_{ij}p + r_{ij}p = \mu_{ij} \Rightarrow r_{ij}p = \mu_{ij}(۱-p) \in \mathcal{R}$$

در نتیجه $1-p \in \mathcal{R}$ پس $t=-(1-p) \in \mathcal{R}$ و $(1+t)=\left(\frac{\mu_{ij}+r_{ij}}{\mu_{ij}}\right)^{-1}$.
فرض کنید

$$(1+t)=\left(\frac{\mu_{ij}+r_{ij}}{\mu_{ij}}\right)^{-1}, \qquad y=\frac{c}{\mu_{ij}}$$

و n_i همان N معرفی شده در لم (الف) باشد. آنگاه اگر $n \geq n_i$ آنگاه

$$\begin{aligned} |\mu_{ij}|^n \| ((\mu_{ij}+r_{ij})+c)^{-n} \| &= \left\| ((1+t)^{-1}+y)^{-n} \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-n}{j} ((1+t)^{-1})^{-n-j} y^j \right\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \binom{-n}{j} (1+t)^{n+j} y^j \right\| \\ &< 3^n \end{aligned} \tag{9.2}$$

پس حکم برقرار است. □

لم (ج)

با فرض برقرار بودن فرضهای لم (ب) n_jی وجود دارد بطوریکه شرط (ج) برقرار است.

اثبات.

فرض کنید n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی n_j معرفی شده در لم (ب) باشد. فرض کنید به‌ازای $i=1,2,\ldots,k$،

$$c_i \in \mathcal{R}^{\#} \qquad , \qquad \|c_i\| \leq \frac{1}{2}|\mu_{ij}|.$$

توجه کنید که s غیر پوچتوان انتخاب شده بود. بنابر این چون بنابر لم (ب)

$$\left(\frac{\|((u_{i1}u_{i2}\cdots u_{ij})+c_i)^{-n}\|}{|\mu_{ij}|^{-n}}\right)^{-1} > 3^{-n}$$

پس

$$\begin{aligned} 3^{-kn}\|s^{kn}\| &< \|s^{kn}\| \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\|((u_{i1}u_{i2}\cdots u_{ij})+c_i)^{-n}\|}{|\mu_{ij}|^{-n}}\right)^{-1} \\ &\leq \|s^{kn}\| \left(\prod_{i=1}^{k} |\mu_{ij}|^n\right)^{-1} \left\| \prod_{i=1}^{k} ((u_{i1}u_{i2}\cdots u_{ij})+c_i)^{-n} \right\|^{-1} \\ &\leq \left(\prod_{i=1}^{k} |\mu_{ij}|\right)^{-n} \left\| \prod_{i=1}^{k} ((su_{i1}u_{i2}\cdots u_{ij})+sc_i)^{n} \right\| \end{aligned} \tag{10.2}$$

با تقسیم طرفین بر $\|s^{kn}\|$ و گرفتن ریشهٔ nام از طرفین و همچنین با توجه به اینکه $3^{-1} \leq (4-\frac{1}{j})^{-1}$ حکم اثبات می‌شود. □

لم (د)

فرض کنید $m,n \in \mathbb{N}$ و $j \leq m$.فرض کنید $\{u_{1p}\}_{p=1}^{m},\ldots,\{u_{kp}\}_{p=1}^{m}$ و $\{n_p\}_{p=1}^{m}$ انتخاب شده باشند.اگر به‌ازای $i=1,2,\ldots,k$،

$$\|su_{i1}u_{i2}\cdots u_{im} - su_{i1}u_{i2}\cdots u_{im}u_{i(m+1)}\|$$

به اندازهٔ کافی کوچک باشد آنگاه خاصیت بازگشتی زیر برقرار است:

اگر به‌ازای هر $i = 1, 2, \dots, k$ و $c_i \in \mathcal{R}^{\#}$, $\|c_i\| < \frac{1}{2}|\mu_{ij}|$ آنگاه

$$(4 - \frac{1}{m})^{-k} < \left(\prod_{i=1}^{k} |\mu_{ij}|\right)^{-1} \|s^{kn_j}\|^{-1/n_j} \left\|\prod_{i=1}^{k} ((su_{i1}u_{i2}\cdots u_{im}) + sc_i)^{n_j}\right\|^{1/n_j}$$

ایجاب می‌کند که

$$(4 - \tfrac{1}{m+1})^{-k} < \left(\prod_{i=1}^{k} |\mu_{ij}|\right)^{-1} \|s^{kn_j}\|^{-1/n_j} \left\|\prod_{i=1}^{k} ((su_{i1}u_{i2}\cdots u_{im}u_{i(m+1)}) + sc_i)^{n_j}\right\|^{1/n_j}.$$

اثبات.

حکم درحقیقت بیان می‌کند که به‌ازای jی داده شده، اگر نامساوی شرط (د) به‌ازای $m \geq j$ برقرار باشد آنگاه برای $m+1$ نیز برقرار است. توجه کنید که عملاً کران پایینی را کاهش می‌دهیم، زیرا $(4 - \frac{1}{m})^{-k}$ اینفیموم روی تمام c_iهایی است که در شرط صدق می‌کند.

با توجه به شرط (ج)، شرط (د) به‌ازای $m = j$ برقرار است(شرط اولیهٔ استقرا). این لم ایجاب می‌کند که اگر یکالهای $u_{k(m+1)}, \dots, u_{1(m+1)}$ مناسب انتخاب شوند بطوریکه در شرط اولیهٔ لم صدق کنند آنگاه شرط (د) برقرار است. تأکید می‌کنیم که در اینجا n_j را ثابت در نظر می‌گیریم.

قدر مطلق تفاضل بین

$$\left(\prod_{i=1}^{k} |\mu_{ij}|\right)^{-n_j} \|s^{kn_j}\|^{-1} \left\|\prod_{i=1}^{k} ((su_{i1}u_{i2}\cdots u_{im}u_{i(m+1)}) + sc_i)^{n_j}\right\|$$

و

$$\left(\prod_{i=1}^{k} |\mu_{ij}|\right)^{-n_j} \|s^{kn_j}\|^{-1} \left\|\prod_{i=1}^{k} ((su_{i1}u_{i2}\cdots u_{im}) + sc_i)^{n_j}\right\|$$

را با Δ نشان می‌دهیم.

به‌ازای $p = m, m+1$ تعریف می‌کنیم

$$B(i,p) = \frac{su_{i1}u_{i2}\cdots u_{ip}}{\mu_{ij}}$$

به‌ازای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ را به گونه ای انتخاب کنید که اگر $(i = 1, \dots, k)\|C_i\| < \delta, C_i \in \mathcal{R}^{\#}$ و اگر $(i = 1, 2, \dots, k)\|y_i\| \leq \frac{1}{2}\|s\|, y_i \in \mathcal{R}^{\#}$ آنگاه

$$\|s^{kn_j}\|^{-1} \left\|\prod_{i=1}^{k} (C_i + (B(i,m) + y_i)^{n_j}) - \prod_{i=1}^{k} (B(i,m) + y_i)^{n_j}\right\| < \epsilon$$

دلیل وجود چنین δی این است که اگر $\|C_i\| \to 0$ آنگاه

$$C_i + (B(i,m) + y_i)^{n_j} \longrightarrow (B(i,m) + y_i)^{n_j}$$

پس حاصلضرب k تائی طرف اوّل به حاصلضرب kتائی طرف دوّم میل می‌کند. بنابر این با کوچک کردن δ به اندازهٔ کافی می‌توان شرط موردنظر را ایجاد کرد.

با انتخاب $y_i = (sc_i)/\mu_{ij}$ و

$$C_i = \sum_{p=0}^{n_j-1} \binom{n_j}{p} (B(i,m+1) - B(i,m))^{n_j-p} (B(i,m) + y_i)^p$$

داریم به‌ازای $i=1,2,\ldots,k$، $\|y_i\| \leq \frac{1}{2}\|s\|$ و چون بنا به فرض به‌ازای $i=1,2,\ldots,k$،

$$\|su_{i1}u_{i2}\cdots u_{im} - su_{i1}u_{i2}\cdots u_{im}u_{i(m+1)}\|$$

را می‌توان به اندازهٔ کافی کوچک کرد پس داریم $\|C_i\| < \delta$. در اینصورت داریم

$$\begin{aligned}
\Delta &\leq \|s^{kn_j}\|^{-1}\left\|\textstyle\prod_{i=1}^{k}(B(i,m+1)+y_i)^{n_j} - \prod_{i=1}^{k}(B(i,m)+y_i)^{n_j}\right\| \\
&\leq \|s^{kn_j}\|^{-1}\|\textstyle\prod_{i=1}^{k}(B(i,m+1)-B(i,m)+B(i,m)+y_i)^{n_j} - \\
&\qquad \textstyle\prod_{i=1}^{k}(B(i,m)+y_i)^{n_j}\| \\
&= \|s^{kn_j}\|^{-1}\|\textstyle\prod_{i=1}^{k}(\sum_{p=0}^{n_j}\binom{n_j}{p}(B(i,m+1)- \\
&\qquad B(i,m))^{n_j-p}(B(i,m)+y_i)^p) - \prod_{i=1}^{k}(B(i,m)+y_i)^{n_j}\| \\
&= \|s^{kn_j}\|^{-1}\left\|\textstyle\prod_{i=1}^{k}(C_i+(B(i,m)+y_i)^{n_j}) - \prod_{i=1}^{k}(B(i,m)+y_i)^{n_j}\right\| \\
&< \epsilon.
\end{aligned} \tag{۲.۱۱}$$

با انتخاب $\epsilon = (4-\frac{1}{m})^{-kn_j} - (4-\frac{1}{m+1})^{-kn_j}$ اثبات لم کامل می‌شود. □

چهار لم فوق درستی ساختار استقرائی که در شرطهای (الف)،(ب)،(ج) و (د) صدق کند را ایجاب می‌کند. بطور خلاصه هر k-بلوک از یکالهای $u_{kj},\ldots,u_{2j},u_{1j}$ به گونه ای انتخاب می‌شوند که به‌ازای $m<n$، u_{mj} قبل از u_{nj} انتخاب می‌شود. هر یکال به گونه ای اختیار می‌شود که شرطهای (الف)،(ب) و (د) برقرار باشند. بعد از انتخاب این بلوک، n_j به گونه ای تعیین می‌شود که شرط (ج) برقرار باشد. بنابراین اثبات قضیه کامل می‌شود. □

نتیجه ۳.۲.۲.

$\epsilon > 0$ داده شده است. فرض کنید به‌ازای $i=1,2,\ldots,k$،

$$s_i = \lim_{j\mapsto\infty} su_{i1}u_{i2}\cdots u_{ij}$$

که u_{ij}ها عناصر ساخته شده در قضیهٔ قبل باشند. آنگاه $\{s_1,s_2,\ldots,s_k\}$ یک دستگاه s- متمرد با k عنصر تشکیل می‌دهد. بعلاوه به‌ازای $i=1,2,\ldots,k$، $\|s-s_i\|<\epsilon$.

اثبات.

چون $s\in\overline{s\mathcal{R}}$ و $\overline{s\mathcal{R}}$ یک ایدآل بسته است پس به‌ازای $i=1,2,\ldots,k$، $s_i\in\overline{s\mathcal{R}}$. بنابر شرط (ب) قضیهٔ فوق به‌ازای $i=1,2,\ldots,k$، $\|s-s_i\|<\epsilon$. شرط الف قضیهٔ فوق ایجاب می‌کند که شرط (الف) تعریف ۲.۲.۱ برقرار است(مثلاً $s_1s_2 = s\left(\lim_{j\mapsto\infty}(s(u_{11}u_{21})(u_{12}u_{22})\cdots(u_{1j}u_{2j})\right)$)

برای نشان دادن برقراری شرط (ب) از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید شرط (ب) از تعریف ۲.۲.۱ برقرار نباشد. آنگاه $M\in\mathbb{R}^+$ به‌ازای $c_i\in\mathcal{R}^\#$($i=1,2,\ldots,k$) موجود است بطوریکه

$$\sup_n \frac{\|\prod_{i=1}^{\infty}(s_i-sc_i)^n\|^{\frac{1}{n}}}{\|s^{kn}\|^{\frac{1}{n}}} \leq M$$

بنابر رابطهٔ ۲.۶، $\lim_{j\mapsto\infty}|\mu_{ij}|=\infty$. پس می‌توان $j\in\mathbb{N}$ را بگونه‌ای اختیار کرد که $\|c_i\|<\frac{1}{2}|\mu_{ij}|$ ($i=1,2,\ldots,k$) و

$$\prod_{i=1}^{k}|\mu_{ij}| > 4^k(M+1)$$

چون به‌ازای $i = ۱, ۲, \dots, k$،

$$\lim_{m>j, m\mapsto\infty} su_{i۱}u_{i۲}\cdots u_{ij}\cdots u_{im} = s_i$$

بنابراین $m > j, m \in \mathbb{N}$ موجود است به قسمیکه

$$\frac{\left\|\prod_{i=۱}^{k}((su_{i۱}u_{i۲}\cdots u_{im}) - sc_i)^{n_j}\right\|}{\|s^{kn_j}\|} < (M+۱)^{n_j}$$

از شرط (د) نتیجه می‌شود

$$\frac{\left\|\prod_{i=۱}^{k}((su_{i۱}u_{i۲}\cdots u_{im}) + s(-c_i))^{n_j}\right\|}{\|s^{kn_j}\|} > \frac{\left(\prod_{i=۱}^{k}|\mu_{ij}|\right)^{n_j}}{(۴-\frac{۱}{m})^{kn_j}} > (M+۱)^{n_j}$$

و این تناقض است پس فرض خلف باطل است و $\{s_۱, s_۲, \dots, s_k\}$ یک دستگاه s- متمرد تشکیل می‌دهد. □

۳.۲ اثبات حدس سینگر- ورمر

با جمعبندی چند قضیهٔ قبل حکمی که جهت اثبات حدس سینگر- ورمر مورد نیاز ماست در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیه ۱.۳.۲ .
فرض کنید $\mathcal{R}$ یک جبر باناخ رادیکال جابجائی باشد. فرض کنید s عضوی از $\mathcal{R}$ باشد که در شرطهای « s غیر پوچتوان است و $s \in \overline{s\mathcal{R}}$ » صدق کند. آنگاه به‌ازای هر همسایگی U از مبدأ و $k \in \mathbb{N}$، یک دستگاه s- متمرد از k عضو در $U \cap \overline{s\mathcal{R}}$ موجود است.

اثبات.
به‌ازای $i = ۱, ۲, \dots, k$، s_iها را طبق نتیجهٔ ۲.۲.۳ می‌سازیم. دستگاه‌متمرد مورد نظر این قضیه عبارتست از

$$\{(s-s_۱), (s-s_۲), \dots, (s-s_k)\}$$

که به‌ازای ϵ به اندازهٔ کافی کوچک، در $U \cap \overline{s\mathcal{R}}$ قرار می‌گیرد. □

حال زمینه مساعد است تا حدس سینگر- ورمر را اثبات کنیم.

قضیه ۲.۳.۲ .
فرض کنید D یک اشتقاق روی یکدار شدهٔ جبر باناخ رادیکال جابجائی $\mathcal{R}$ یعنی $\mathcal{R}^\#$ باشد. آنگاه برد D در داخل رادیکال $\mathcal{R}^\#$(یعنی $\mathcal{R}$) قرار می‌گیرد. ($D(\mathcal{R}^\#) \subseteq \mathcal{R}$).

اثبات.
$m_۰$ را عدد معرفی شده در قضیهٔ ۲.۱.۲۴ و $s = z^{m_۰}$ در نظر بگیرید. بنابر لم ۲.۱.۲۳ و قضیهٔ ۲.۱.۲۴ چون z غیر پوچتوان است پس $s = z^{m_۰}$ غیر پوچتوان است و $s \in \overline{s\mathcal{R}}$. فرض کنید $k = m_۰ + ۱$، بنابر قضیهٔ فوق در هر همسایگی s یک دستگاه s- متمرد از $m_۰ + ۱$ عضو $\{s_۱, s_۲, \dots, s_{m_۰+۱}\}$ موجود است. توجه کنید که

۱) $s = z^{m_۰}$ هر ضرب دوتائی متمایز $i < j, s_i s_j$ را در $\mathcal{R}^\#$ عاد می‌کند.

۲) $s^{2} = z^{2m_{0}}$ هر ضرب سه‌تائی متمایز $s_i s_j s_m$, $i < j < m$, را در $\mathcal{R}^{\#}$ عاد می‌کند.

$$\vdots$$

m_{0}) $s^{m_{0}} = z^{m_{0}^{2}}$ ضرب $m_{0} + 1$ تائی $s_{1} s_{2} \cdots s_{m_{0}+1}$ را در $\mathcal{R}^{\#}$ عاد می کند.

بنابر قضیهٔ ۲.۱.۲۵ به‌ازای هر $i = 1, 2, \ldots, m_{0} + 1$, $c_i \in \mathcal{R}^{\#}$ موجود است به قسمیکه

$$\prod_{i=1}^{m_{0}+1} (s_i - z^{m_{0}} c_i) = \prod_{i=1}^{m_{0}+1} (s_i - s c_i) \in \mathcal{D}_z$$

در حالت خاص، $t \in \mathcal{R}$ موجود است بطوریکه $\prod_{i=1}^{m_{0}+1} (s_i - s c_i) = s^{m_{0}+1} t$. بنابر این چون $t \in \mathcal{R}$ پس $r(t) = 0$ داریم

$$\sup_{n} \frac{\left\| \prod_{i=1}^{m_{0}+1} (s_i - s c_i)^n \right\|^{1/n}}{\left\| s^{(m_{0}+1)n} \right\|^{1/n}} \leq \sup_{n} \left\| t^n \right\|^{1/n} < +\infty.$$

و این با متمرد بودن $\{s_{1}, s_{2}, \ldots, s_{m_{0}+1}\}$ متناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌شود. $\square$

بنابراین با توجه به قضایای ثابت شده توسط جانسون و توضیحات مربوطه، برد هر اشتقاق اعمّ از پیوسته و ناپیوسته در داخل رادیکال قرار می‌گیردو حدس سینگر-ورمر ثابت می‌شود.

رونده در سال ۱۹۹۰ اقدام به جمع آوری قضایای ثابت شده در مورد اشتقاقهای روی جبرهای باناخ جابجائی کرد[۴۱]. وی در این مجموعه اثبات ساده‌تری برای حدس سینگر-ورمر ارائه کرد.

فصل ۳

حدس سینگر-ورمر غیر جابجائی

طبیعی است اولین چیزی که پس از خواندن فصل دوم به نظر می‌رسد این است که نتایج فصل پیش را به جبرهای باناخ غیر جابجائی تعمیم دهیم. امّا تعمیم قضیه و حدس سینگر-ورمر به جبرهای باناخ غیر جابجائی بدون اضافه کردن فرضی حتی برای اشتقاقهای کراندار(پیوسته) نیز برقرار نیست زیرا

فرض کنید A یک جبر باناخ نیمساده و غیر جابجائی باشد و عنصر $a \in A$ را به گونه ای در نظر بگیرید که در$Z(A)$، مرکز A، نباشد. در اینصورت

$$\begin{aligned} \delta_a : \quad A \to &\quad A \\ x \to &\quad [a,x] = ax - xa \end{aligned}$$

یک اشتقاق کراندار و ناصفر است. بنابر این برد آن داخل رادیکال (که صفر است) قرار نمی‌گیرد.

حدس سینگر-ورمر را به طُرُق مختلف به حالت غیرجابجائی تعمیم داده‌اند. هر کدام از این تعمیمها مبتنی بر قضایای مهمی در جبر باناخ است که در حالت جابجائی قضیه یا حدس سینگر-ورمر را نتیجه می‌دهد.

اولین تعمیم در سال ۱۹۸۴ توسط یود [۵۴] برای قضیهٔ سینگر-ورمر ارائه شد.

سینکلر در سال ۱۹۶۹ ثابت کرد که هر اشتقاق کراندار روی یک جبر باناخ، ایدآلهای اولیه را ثابت نگه می‌دارد(قضیهٔ ۱.۶.۱۶). در جبرهای باناخ جابجائی قضیهٔ سینگر-ورمر از قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود زیرا بنابر این قضیه هر اشتقاق پیوسته رادیکال را پایا نگه می‌دارد($D(\mathrm{rad}(A)) \subseteq \mathrm{rad}(A)$) و چون $\frac{A}{\mathrm{rad}(A)}$ نیمساده است پس بنابر قضیهٔ جانسون $D_{\mathrm{rad}(A)} = 0$ یعنی $D(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$. لذا از این طریق حدس سینگر-ورمر را به حالت غیر جابجائی تعمیم داده‌اند.

این سئوال باز که به قضیهٔ سینگر-ورمر غیر جابجائی معروف است به صورت زیر است.

«هر اشتقاق روی یک جبر باناخ، هر ایدآل اولیه را پایا نگه می‌دارد.»

در حالت جابجائی $\mathrm{rad}(A) = Q(A)$. امّا در جبرهای باناخ غیر جابجائی این تساوی لزوماً برقرار نیست بلکه همواره داریم $\mathrm{rad}(A) \subseteq Q(A)$. لذا پاره‌ای از تعمیمها با قرار دادن شرایطی ثابت کرده اند که برد اشتقاق داخل $Q(A)$ قرار می‌گیرد. از دیگر روشهای تعمیم، موضعی کردن قضیه است به این معنی که به جای بحث روی برد اشتقاق ، روی اعضایی بحث می‌شود که با داشتن چه شرایطی تصویر آنها تحت اشتقاق داخل $\mathrm{rad}(A)$(یا $Q(A)$،...) قرار می‌گیرد.

مثلاً اگر فرضهای قضیه کلینکِ- شیرکوف (۱.۶.۱۲) را با اشتقاق درونی نمایش دهیم بصورت یکی از دو شرط زیر در می‌آید.

۱) $\delta_a^2(b) = 0$

۲) $[a, \delta_a] = 0$

حال اگر به جای اشتقاق درونی، اشتقاق دلخواه D قرار دهیم دو سئوال زیر ایجاد می‌شود:

الف) آیا شرط $D^2(a) = 0$ (بەازای $a \in A$) ایجاب می‌کند که $D(a)$ شبه پوچتوان است؟

ب) آیا شرط $[a, D(a)] = 0$ (بەازای $a \in A$) ایجاب می‌کند که $D(a)$ شبه پوچتوان است؟

ماتیو و مورفی [۲۸] ثابت کردند اگر D کراندار باشد جواب مثبت است. ماتیو و رونده نشان دادند که اگربەازای هر $a \in A$ ، $[a, D(a)] = 0$ (یا حتی شرط ضعیف‌تر $[a, D(a)] \in Z(A)$) آنگاه با حذف شرط کرانداری نیز نتیجه می‌شود که برد D داخل رادیکال قرار می‌گیرد.

بالاخره توماس (قضیهٔ ۳.۲.۲۰) نشان داد که پاسخ سئوال الف فوق مثبت است امّا سئوال (ب) هنوز به عنوان یک مسأله باز مطرح است.

در این فصل به بررسی تعمیمهای فوق و پاره ای تعمیمهای دیگر می‌پردازیم.

۱.۳ قضیهٔ سینگر- ورمر غیرجابجائی

در این بخش شرایطی را بررسی می‌کنیم که ایجاب می‌کند برد یک اشتقاق پیوسته روی یک جبر باناخ، داخل رادیکال قرار میگیرد. ابتدا یک ابزار مؤثر برای کار با اشتقاقهای پیوسته را بیان می‌کنیم.

فرض کنید D یک اشتقاق کراندار روی جبر باناخ A باشد. همانطور که قبلاً بیان شد A را می‌توان یکدار در نظر گرفت. حال فرض کنید $B = B(A)$ جبر باناخ تمام عملگرهای خطی کراندار(پیوسته) روی A باشد. با نمایش منظم از چپ $a \mapsto L_a$ که $L_a(x) = ax$، A را می‌توان یک زیرجبر بستهٔ B در نظر گرفت. با این ترتیب D روی B به یک اشتقاق درونی تبدیل می‌شود یعنی

$$L_{D(a)} = -[L_a, D] = [D, L_a].$$

پس با روند فوق هر اشتقاق کراندار روی یک جبر بزرگتر درونی است. از این تکنیک برای تعمیم پاره‌ای از قضایای اثبات شده روی اشتقاقهای درونی به اشتقاقهای کراندار استفاده می‌شود. علاوه بر این این سئوال مطرح می‌شود که آیا هر اشتقاق روی یک جبر بزرگتر درونی است؟ این یک مسئلهٔ باز است.

ابتدا تعمیم یود را بیان می‌کنیم. توجه کنید که تا زمان اثبات این تعمیم، حدس سینگر- ورمر ثابت نشده بود.

ابتدا یک قضیه و لم که برای اثبات تعمیم یود نیاز داریم را می‌آوریم.

قضیه ۱.۱.۳ . (یود ۱۹۸۴)

فرض کنید $G(A)$ گروه عناصر وارونپذیر A و G_1 مؤلفهٔ اصلی $G(A)$ باشد (منظور از مؤلفهٔ اصلی $G(A)$، آن مؤلفه از $G(A)$ است که حاوی عضو یکه است). همچنین فرض کنید W یک همریختی پیوسته از A بروی یک زیرمجموعهٔ چگال A باشد و $S(W) = \{v \in G(A) | v^{-1}W(v) \in Z(A)\}$. احکام زیر معادلند:

الف) $G_1 \subseteq S(W)$.

ب) W با هر اشتقاق درونی جابجا می‌شود($W\delta_a = \delta_a W$).

ج) $(I-W)(A) \subseteq Z(A)$.

اثبات.
ر. ک. [۵۴] قضیهٔ ۲.۱. □

لم ۲.۱.۳ .
با نمادهای قضیهٔ فوق اگر P یک ایدآل اولیه A باشد و $W(P) \subseteq P$ و $G_1 \subseteq S(W)$ آنگاه $(I-W)(A) \subseteq P$.

اثبات.
ر. ک. [۵۴] نتیجهٔ ۲.۳. □

قضیه ۳.۱.۳ . (یود ۱۹۸۴)[۵۴]
فرض کنید D یک اشتقاق پیوسته روی جبر باناخ A باشد. احکام زیر معادلند:
الف) به‌ازای هر $a \in A$، $[D,\delta_a](A) = (D\delta_a - \delta_a D)(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$
ب) $D(A) \subseteq \{x \in A | [x,y] \in \mathrm{rad}(A), \quad \forall y \in A\}$
ج) $D(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$

اثبات.
بنابر قضیهٔ ۱.۶.۱۶ به‌ازای هر ایدآل اولیهٔ P، $D(P) \subseteq P$. چون رادیکال ، اشتراک ایدآلهای اولیه است پس $D(\mathrm{rad}(A)) \subseteq \mathrm{rad}(A)$. بنابر این بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد شود فرض می‌کنیم $\mathrm{rad}(A) = \{0\}$. به‌ازای هر $x \in A$ داریم

$$\begin{aligned}
(D\delta_a - \delta_a D)(x) &= (D\delta_a)(x) - (\delta_a D)(x) \\
&= D(ax - xa) - aD(x) + D(x)a \\
&= D(a)x + aD(x) - D(x)a - xD(a) - aD(x) + D(x)a \\
&= D(a)x - xD(a) \\
&= [D(a), x]
\end{aligned}$$

بنابراین شرایط الف و ب معادلند.
اثبات (ب ⇐ ج)
فرض کنید $D(A) \subseteq Z(A)$(توجه کنید که فرض کرده‌ایم $\mathrm{rad}(A) = \{0\}$). نشان می‌دهیم $D = 0$.
به‌ازای هر اسکالر $\lambda \neq 0$ داریم

$$\begin{aligned}
(exp(\lambda D) - I)(A) &= \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda D)^n}{n!} - I\right)(A) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda D)^n}{n!}\right)(A) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n D^n}{n!}(A) \\
&\subseteq Z(A)
\end{aligned}$$

دلیل آخرین شمول این است که بنا به فرض $D(A) \subseteq Z(A)$ داریم

$$D^2(A) = D(D(A)) \subseteq D(A) \subseteq Z(A).$$

با استقرا ثابت می‌شود به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $D^n(A) \subseteq Z(A)$. در نتیجه بنابر قضیهٔ قبل $G_1 \subseteq S(W)$.

فرض کنید P یک ایدآل اولیهٔ A باشد. بنابر قضیهٔ ۱.۶.۱۶ $D(P) \subseteq P$. بنابر این با استقرا ثابت می‌شود که به ازای هر n، $D^n(P) \subseteq P$. پس $exp(\lambda D)(P) \subseteq P$. بنابر لم فوق $(exp(\lambda D)-I)(A) \subseteq P$. چون P دلخواه بود پس $(exp(\lambda D)-I)(A) \subseteq \mathsf{rad}(A) = \{۰\}$. بنابر این $exp(\lambda D) = I$.

$$\Rightarrow I + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(\lambda D)^n}{n!} = I \Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(\lambda D)^n}{n!} = ۰$$

چون $\lambda \neq ۰$ پس

$$D + \frac{\lambda D^۲}{۲!} + \frac{\lambda^۲ D^۳}{۳!} + \cdots = ۰$$

حال اگر $\lambda \to ۰$ داریم $D = ۰$ و حکم اثبات می‌شود.

اثبات (ج ⇐ ب)

بدیهی است. □

قضیه ۴.۱.۳ . (*پتاک ۱۹۷۹*)[۳۵]

فرض کنید A یک جبر باناخ و D یک اشتقاق درونی روی A باشد. اگر $D(A) \subseteq Q(A)$ آنگاه $D(A) \subseteq \mathsf{rad}(A)$.

اثبات.

ر. ک. قضیهٔ ۳.۱ [۳۵]. □

ماتیو و مورفی این نتیجه را برای اشتقاقهای کراندار ثابت کردند.

قضیه ۵.۱.۳ .

فرض کنید A یک جبر باناخ و D یک اشتقاق کراندار روی A باشد. اگر $D(A) \subseteq Q(A)$ آنگاه $D(A) \subseteq \mathsf{rad}(A)$.

اثبات.

ر. ک. قضیهٔ ۳.۱ [۲۸]. □

توروفسکی و شولمن [۴۹] قضیهٔ فوق را برای اشتقاقهای دلخواه ثابت کردند.

قضیه ۶.۱.۳ . (*قضیهٔ اول پوسنر*)

فرض کنید R یک حلقهٔ اول با مشخصهٔ مخالف ۲ باشد. آنگاه حاصلضرب هر دو اشتقاق ناصفر روی R یک اشتقاق نیست.

اثبات.

ر. ک. [۳۲]. □

قضیه ۷.۱.۳ . (*قضیهٔ دوم پوسنر*)

فرض کنید D یک اشتقاق مرکزساز روی حلقهٔ اول R باشد. آنگاه $D = ۰$ یا R جابجائی است.

اثبات.

ر. ک. [۳۲]. □

ماتیو [۲۴] نشان داد که قضیهٔ دوم پوسنر از قضیهٔ اول آن نتیجه می‌شود.

قضیه ۸.۱.۳ .

فرض کنید D یک اشتقاق پیوسته روی جبر باناخ A باشد. اگر $a \in A$ در شرط $D^۲(a) = ۰$ صدق کند آنگاه $D(a)$ شبه پوچتوان است.

اثبات.
با در نظرگرفتن توضیحات ابتدای بخش داریم، به‌ازای هر $L_a \in B(A)$،

$$[D,[D,L_a]] = [D, L_{D(a)}] = L_{D^{۲}(a)} = ۰$$

پس بنابر قضیهٔ کلینِک-شیرکوف(۱.۶.۱۲) $[D, L_a]$ شبه پوچتوان است. پس

$$۰ = r\left([D, L_a]\right) = r\left(L_{D(a)}\right) = r(D(a)) \Rightarrow r(D(a)) = ۰$$

پس $D(a)$ شبه پوچتوان است و حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۹.۱.۳ . *(برِسار - ووکمن ۱۹۹۲)* [۸]
فرض کنید D وG اشتقاقهای پیوسته روی جبر باناخ A باشند بطوریکه

$$[D^{۲}(x) + G(x), x] \in \mathrm{rad}(A) \qquad , \qquad \forall\, x \in A$$

آنگاه D وG، A را به توی $\mathrm{rad}(A)$ می‌نگارند.

اثبات.
اگر A جابجائی باشد حکم بنابر قضیهٔ سینگر- ورمر برقرار است. فرض کنید A غیر جابجائی باشد. فرض کنید P یک ایدآل اولیهٔ A باشد. بنابر قضیهٔ ۱.۶.۱۶ $D(P) \subseteq P$ و $G(P) \subseteq P$. d و g را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{array}{llll} d: & A/P \to A/P & \qquad g: & A/P \to A/P \\ & x+P \to D(x)+P & & x+P \to G(x)+P \end{array}$$

چون P اولیه است پس A/P یک جبر اولیه است. براحتی می‌توان نشان داد که d و g اشتقاقهایی روی A/P می‌باشند.
از طرفی به‌ازای هر $u \in A/P$ $(u = x+P)$،

$$[d^{۲}(u) + g(u), u] = [D^{۲}(x) + G(x) + P, x+P] = [D^{۲}(x) + G(x), x] + P = P$$

پس $[d^{۲}(u) + g(u), u] = ۰$. بنابراین بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد شود فرض می‌کنیم Aاولیه و $D^{۲} + G$ جابجاگر است. برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم $D = ۰$ و $G = ۰$. هر جبر باناخ اولیهٔ جابجائی با میدان مختلط یکریخت است . پس کافی است حکم را برای حالت غیر جابجائی بررسی کنیم.
فرض کنید $F = D^{۲} + G$. پس به‌ازای هر $x \in A$، $[F(x), x] = ۰$. حال اگر x را به $x+y$ تبدیل کنیم داریم

$$\begin{aligned} &[F(x+y), x+y] = ۰ \Rightarrow (x+y)F(x+y) = F(x+y)(x+y) \\ &\Rightarrow xF(x+y) + yF(x+y) = F(x+y)x + F(x+y)y \\ &\Rightarrow xF(x) + xF(y) + yF(x) + yF(y) = F(x)x + F(y)x + F(x)y + F(y)y \qquad (۱.۳) \\ &\Rightarrow [F(x), y] + [F(y), x] + [F(y), y] + [F(x), x] = ۰ \\ &\Rightarrow [F(x), y] + [F(y), x] = ۰ \qquad \forall\, x, y \in A \end{aligned}$$

از طرفی با جانشانی و محاسبه داریم

$$F(yx) = F(y)x + yF(x) + 2D(y)D(x)$$

حال اگر در رابطهٔ ۱.۳، y را به yx تبدیل کنیم داریم

$$\begin{aligned}
0 &= [F(x), yx] + [F(yx), x] \\
&= [F(x), yx] + [F(y)x + yF(x) + 2D(y)D(x), x] \\
&= F(x)yx - yxF(x) + (F(y)x + yF(x) + 2D(y)D(x))\,x - \\
&\qquad x(F(y)x + yF(x) + 2D(y)D(x)) \\
&= F(x)yx - yxF(x) + F(y)x^2 + yF(x)x + 2D(y)D(x)x - \\
&\qquad xF(y)x - xyF(x) - 2xD(y)D(x) \\
&= [F(x), y]x + y[F(x), x] + [F(y), x]x + [y, x]F(x) + y[F(x), x] + \\
&\qquad 2[D(y), x]D(x) + 2D(y)[D(x), x]
\end{aligned}$$

با توجه به رابطهٔ ۱.۳ و اینکه $[F(x), x] = 0$، به‌ازای هر $x, y \in A$ داریم

$$[y, x]F(x) + 2[D(y), x]D(x) + 2D(y)[D(x), x] = 0. \tag{2.3}$$

حال در ۲.۳، y را به xy تبدیل می‌کنیم. در اینصورت داریم

$$\begin{aligned}
0 &= [xy, x]F(x) + 2[D(xy), x]D(x) + 2D(xy)[D(x), x] \\
&= x[y, x]F(x) + 2\left((D(x)y + xD(y))x - x(D(x)y + xD(y))\right)D(x) + \\
&\qquad 2D(x)y[D(x), x] + 2xD(y)[D(x), x] \\
&= x[y, x]F(x) + 2[D(x), x]yD(x) + 2D(x)[y, x]D(x) + \\
&\qquad 2x[D(y), x]D(x) + 2D(x)y[D(x), x] + 2xD(y)[D(x), x] \\
&= x\left([y, x]F(x) + 2[D(y), x]D(x) + 2D(y)[D(x), x]\right) + \\
&\qquad 2[D(x), x]yD(x) + 2D(x)[y, x]D(x) + 2D(x)y[D(x), x] \\
&\Rightarrow [D(x), x]yD(x) + D(x)[y, x]D(x) + D(x)y[D(x), x] = 0 \\
&\Rightarrow D(x)xyD(x) - xD(x)yD(x) + D(x)yxD(x) - D(x)xyD(x) + \\
&\qquad D(x)yD(x)x - D(x)yxD(x) = 0 \\
&\Rightarrow xD(x)yD(x) = D(x)yD(x)x \qquad \forall\, x, y \in A
\end{aligned} \tag{3.3}$$

حال اگر y را به $zD(x)y$ تبدیل کنیم داریم

$$D(x)\,(zD(x)y)\,D(x)x = xD(x)\,(zD(x)y)\,D(x)$$

امّا با توجه به رابطهٔ ۳.۳ داریم

$$D(x)zD(x)yD(x)x = D(x)zxD(x)yD(x)$$

و

$$xD(x)zD(x)yD(x) = D(x)zD(x)xyD(x)$$

با مقایسهٔ دو رابطهٔ فوق داریم

$$D(x)[D(x), x]AD(x) = D(x)AD(x)xAD(x) - D(x)AxD(x)AD(x) = 0$$

چون هر جبر اولیه ، اول است(قضیهٔ ۱.۴.۱۵) پس به‌ازای هر $x \in A$ داریم $D(x) = 0$ یا $[D(x), x] = 0$. در هر دو حالت داریم $[D(x), x] = 0$. بنابر قضیهٔ ۳.۱.۷ $D = 0$. پس به‌ازای هر $x \in A$ $[G(x), x] = 0$ (زیرا بنا بفرض $[D^2(x) + G(x), x] = 0$). بنابراین $G = 0$ و حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه ۱۰.۱.۳ .
فرض کنید D و G اشتقاقهای پیوسته روی جبر باناخ A باشند. اگر نگاشت $D^2 + G$ مرکزساز باشد آنگاه D و G، A را به توی $\mathsf{rad}(A)$ می‌نگارند.

اثبات.
فرض کنید تعویضگرهای $[a, b]$ $(a, b \in A)$ در داخل مرکز A قرار داشته باشند. آنگاه $[[a, b], a] = 0$. بنابرقضیهٔ کلینکِ-شیرکوف (۱.۶.۱۲) $[a, b]$ شبه پوچتوان است. بعلاوه چون $[a, b] \in Z(A)$ پس بنابر قضیهٔ ۱.۵.۱۲ (د) $[a, b] \in \mathsf{rad}(A)$. بنابراین به‌ازای هر نگاشت مرکزساز F روی جبر باناخ A و به‌ازای هر $x \in A$ داریم $[F(x), x] \in \mathsf{rad}(A)$. بنابراین $[D^2(x) + G(x), x] \in \mathsf{rad}(A)$ پس بنابر قضیهٔ فوق حکم اثبات می‌شود. □

نتیجهٔ فوق تعمیمی از قضیهٔ ۳.۱.۸ است که توسط بِرِسار ثابت شده است.

قضیه ۱۱.۱.۳ .
فرض کنید R یک حلقهٔ اول با مشخصهٔ مخالف ۲ باشد. فرض کنید D_1، D_2 و D_3 اشتقاقهایی روی R باشند بطوریکه به‌ازای هر $x \in R$، $D_1\left(D_1^2(x) + D_2(x)\right) = D_3(x)$. آنگاه $D_1 = 0$ یا $D_2 = 0$.

اثبات.
ر. ک. [۵۱] قضیهٔ ۲. □

قضیه ۱۲.۱.۳ . (ووکمن ۱۹۹۲)[۵۱]
فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. فرض کنید اشتقاق پیوستهٔ D روی A موجود باشد بطوریکه به‌ازای یک $\alpha \in \mathbb{C}$، $\alpha D^3 + D^2$ اشتقاق باشد. آنگاه $D(A) \subseteq \mathsf{rad}(A)$.

اثبات.
فرض کنید اشتقاق D_P القا شده توسط D روی A/P باشد. چون A/P نیمساده است بنابر قضیهٔ ۲.۱.۹ D_P پیوسته است.

اگر A/P جابجائی باشد بنابر قضیهٔ ۲.۱.۱ $D_P = 0$ (زیرا A/P نیمساده است)

حال فرض کنید A/P غیر جابجائی باشد. بنابر فرض $\alpha D^3 + D^2$ یک اشتقاق است براحتی می‌توان نشان داد $\alpha D_P^3 + D_P^2$ یک اشتقاق است.

دو حالت در نظر می‌گیریم:

ابتدا فرض کنید $\alpha = 0$. در این حالت D_P^2 یک اشتقاق است. چون A/P اول است از قضیهٔ ۳.۱.۶ نتیجه می‌شود که $D_P = 0$. اگر $\alpha \neq 0$ تمام شرایط قضیهٔ فوق برقرار است.($D_2 = \frac{D_P}{\alpha}, D_1 = D_P$)

بنابر این $D_P = 0$ یا $\frac{D_P}{\alpha} = 0$. پس در هر حالت $D_P = 0$. به عبارت دیگر به‌ازای هر $x \in A$، $D(x)$ در اشتراک تمام ایدآلهای اولیهٔ A قرار می‌گیرد و چون رادیکال اشتراک ایدآلهای اولیه است پس حکم اثبات می‌شود. □

حال این سئوال ایجاد می‌شود که آیا می‌توان شرط پیوستگی را در قضیهٔ فوق حذف کرد. هنوز پاسخ مثبتی به این سئوال داده نشده است امّا در حالتی که A نیمساده باشد حکم برقرار است.

قضیه ۱۳.۱.۳ .
فرض کنید A یک جبر باناخ نیمساده باشد. همچنین فرض کنید اشتقاق D روی A موجود باشد به قسمیکه به‌ازای یک $\alpha \in \mathbb{C}$، $D^۲ + \alpha D^۳$ اشتقاق باشد. آنگاه $D = ۰$.

اثبات.
بنا بر قضیهٔ ۲.۱.۹ هر اشتقاق روی جبر باناخ نیمساده پیوسته است. پس بنا بر قضیهٔ فوق حکم بدیهی است. □

قضیهٔ زیر تعمیمی از قضیه ۳.۱.۳ می باشد.

قضیه ۱۴.۱.۳ . (*ماتیو- مورفی ۱۹۹۱*)[۲۸]
فرض کنید D یک اشتقاق پیوسته روی جبر باناخ A باشد و به‌ازای هر $x \in A$، $[D(x), x] \in \mathsf{rad}(A)$ آنگاه $D(A) \subseteq \mathsf{rad}(A)$.

اثبات.
بنا بر قضیهٔ ۱.۶.۱۶ بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد شود فرض می‌کنیم A اولیه است. پس D مرکزساز و A اول است. اگر A غیر جابجائی باشد بنابر قضیهٔ ۳.۱.۷ $D = ۰$. در غیر اینصورت (A جابجائی است) بنابر قضیهٔ سینگر- ورمر (۲.۱.۱) $D = ۰$. پس حکم اثبات می‌شود.
□

قضیه ۱۵.۱.۳ . (*ماتیو- مورفی ۱۹۹۱*)
فرض کنید A یک جبر باناخ و D یک اشتقاق پیوسته و مرکزساز روی A باشد آنگاه $D(A) \subseteq \mathsf{rad}(A)$.

اثبات.
مشابه قبل فرض کنید A اولیه باشد. چون بنا به فرض $[a, D(a)] \in Z(A)$ پس بنابر قضیهٔ کلینک- شیرکوف $r([a, D(a)]) = ۰$. پس $[a, Da] \in Q(A) \cap Z(A) \subseteq \mathsf{rad}(A) = \{۰\}$. بنابر این به‌ازای هر $a \in A$ $[a, D(a)] = ۰$. با تبدیل a به $a + b$ داریم

$$\begin{aligned} ۰ &= [a+b, D(a+b)] \\ &= [a, D(a)] + [b, D(a)] + [a, D(b)] + [b, D(b)] \end{aligned} \tag{۴.۳}$$

پس $(a, b \in A)$ $[b, D(a)] = [D(b), a]$. بنابراین

$$\delta_b \circ D(a) = [b, D(a)] = [D(b), a] = \delta_{D(b)}$$

پس بنابر قضیهٔ اول پوسنر (۳.۱.۶) $D = ۰$ و حکم ثابت می‌شود.
□

قضیه ۱۶.۱.۳ .
اگر A یک حلقهٔ اوّل از مشخصهٔ مخالف ۲ باشد آنگاه هر اشتقاق ژوردان روی A یک اشتقاق است.

اثبات.
ر. ک. [۱۶] قضیهٔ ۳.۱. □

قضیه ۱۷.۱.۳ .
فرض کنید A یک جبر باناخ و D یک اشتقاق پیوسته روی A باشد. اگر بهازای هر $x \in A$، $(D(x))^۲ \in \text{rad}(A)$ *آنگاه* $D(A) \subseteq \text{rad}(A)$.

اثبات.
مشابه اثباتهای قبلی بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد شود فرض می‌کنیم A اولیه است. نشان می‌دهیم به‌ازای هر $a \in A$، $D(a) = ۰$. بنابر قضیهٔ ۱.۴.۱۵ ، A اول است.
به‌ازای هر $a \in A$ داریم

$$\begin{aligned} D^۲(a^۲) &= D(D(a^۲)) \\ &= D(aD(a) + D(a)a) \\ &= D(a)D(a) + aD^۲(a) + D^۲(a)a + D(a)D(a) \\ &= aD^۲(a) + D^۲(a)a + ۲(D(a))^۲ \\ &= aD^۲(a) + D^۲(a)a \end{aligned} \tag{۵.۳}$$

بنابراین $D^۲$ یک اشتقاق ژوردان است. بنابر قضیهٔ ۳.۱.۶، $D^۲$ اشتقاق است. بنابراین

$$D^۲(ab) = aD^۲(b) + D^۲(a)b$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} D^۲(ab) &= D(D(ab)) \\ &= D(D(a)b + aD(b)) \\ &= D^۲(a)b + D(a)D(b) + D(a)D(b) + aD^۲(b) \\ &= D^۲(a)b + ۲D(a)D(b) + aD^۲(b) \end{aligned} \tag{۶.۳}$$

بنابراین با مقایسهٔ دو رابطهٔ فوق داریم $(a, b \in A) \quad D(a)D(b) = ۰$.
حال با جاگذاری ac به جای a داریم

$$\begin{aligned} ۰ = D(ac)D(b) &= (aD(c) + D(a)c)\, D(b) \\ &= aD(c)D(b) + D(a)cD(b) \\ &= D(a)cD(b) \end{aligned} \tag{۷.۳}$$

پس $D(a)AD(b) = ۰$. چون A اول است پس به‌ازای هر $a \in A$، $D(a) = ۰$ و حکم ثابت می‌شود.
□

قضیه ۱۸.۱.۳ .
اشتقاق ناصفر D روی حلقهٔ اول غیرجابجائی R از مشخصهٔ مخالف ۲ نمی‌تواند در شرایط زیر صدق کند:
۱) *به‌ازای هر* $x \in R$, $\quad [[D(x), x], x] = ۰$.
۲) *به‌ازای هر* $x \in R$, $\quad [D(x), x]D(x) = ۰$.

اثبات.
ر. ک. [۵۲] یا [۵۳]. □

قضیه ۱۹.۱.۳ . (برِسار- ووکمن ۱۹۹۲)[۸]
فرض کنید D یک اشتقاق پیوسته روی جبر باناخ A باشد. اگر به‌ازای هر $x \in A$، $[D(x), x]^۲ \in \mathsf{rad}(A)$ آنگاه $D(A) \subseteq \mathsf{rad}(A)$.

اثبات.
مشابه اثبات قضایای قبل بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد شود فرض می‌کنیم A اولیه و غیرجابجائی است و به‌ازای هر $x \in A$، $[D(x), x]^۲ = ۰$.
چون A اولیه است پس اول است. نگاشت دوخطی متقارن $B : A \longrightarrow A$ را با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$B(x, y) = [D(x), y] + [D(y), x]$$

تعریف می‌کنیم

$$f(x) = B(x, x) = ۲[D(x), x]$$

بنابر فرض به‌ازای هر $x \in A$, $f(x)^۲ = ۰$.
بنابراین به‌ازای هر $x, y \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ داریم

$$\begin{aligned}
۰ &= f(x+\lambda y)^۲ \\
&= (B(x+\lambda y, x+\lambda y))^۲ \\
&= (B(x, x) + B(x, \lambda y) + B(\lambda y, x) + B(\lambda y, \lambda y))^۲ \\
&= \left(f(x) + ۲\lambda B(x, y) + \lambda^۲ f(y)\right)^۲ \\
&= f(x)^۲ + ۴\lambda^۲ B(x, y)^۲ + \lambda^۴ f(y)^۲ + ۲\lambda f(x)B(x, y) + \\
&\qquad ۲\lambda B(x, y)f(x) + \lambda^۲ f(x)f(y) + \lambda^۲ f(y)f(x) + \\
&\qquad ۲\lambda^۳ B(x, y)f(y) + ۲\lambda^۳ f(y)B(x, y) \\
&= \lambda\,(۲f(x)B(x, y) + ۲B(x, y)f(x)) + \lambda^۲(۴B(x, y)^۲ + f(x)f(y) + \\
&\qquad f(y)f(x)) + \lambda^۳\,(۲B(x, y)f(y) + ۲f(y)B(x, y))
\end{aligned} \qquad (۸.۳)$$

چون λ دلخواه است پس

$$B(x, y)f(x) + f(x)B(x, y) = ۰ \qquad \forall\, x, y \in A \qquad (۹.۳)$$

با تبدیل y به yz در رابطهٔ ۹.۳ داریم

$$B(x, yz)f(x) + f(x)B(x, yz) = ۰$$

چون

$$\begin{aligned}
B(x, yz) &= [D(x), yz] + [D(yz), x] \\
&= D(x)yz - yzD(x) + (D(y)z + yD(z))\,x - x\,(D(y)z + yD(z)) \\
&= D(x)yz - yzD(x) + D(y)zx + yD(z)x - xD(y)z - xyD(z) \\
&= (D(x)y - xD(y))\,z + y\,(D(z)x - zD(x)) + D(y)zx - xyD(z) \\
&= B(x, y)z + zB(x, z) + D(y)(zx - xz) + (yx - xy)D(z) \\
&= B(x, y)z + yB(x, z) + D(y)[z, x] + [y, x]D(z)
\end{aligned}$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
0 &= B(x,yz)f(x)+f(x)B(x,yz)\\
&= (B(x,y)z+yB(x,z)+D(y)[z,x]+[y,x]D(z))\,f(x)+\\
&\quad f(x)(B(x,y)z+yB(x,z)+D(y)[z,x]+[y,x]D(z))\\
&= B(x,y)zf(x)+yB(x,z)f(x)+D(y)[z,x]f(x)+[y,x]D(z)f(x)+\\
&\quad f(x)B(x,y)z+f(x)yB(x,z)+f(x)D(y)[z,x]+f(x)[y,x]D(z)
\end{aligned}
$$

با کم و زیاد کردن جملات مناسب و با توجه به رابطهٔ ۹.۳ داریم

$$B(x,y)[z,f(x)]+[f(x),y]B(x,z)+D(y)[z,x]f(x)+[y,x]D(z)f(x)$$

$$+f(x)D(y)[z,x]+f(x)[y,x]D(z)=0 \qquad \forall\, x,y,z\in A \tag{۱۰.۳}$$

با تبدیل y به x و z به y داریم

$$B(x,x)[y,f(x)]+[f(x),x]B(x,y)+D(x)[y,x]f(x)+[x,x]D(y)f(x)+$$

$$f(x)D(x)[y,x]+f(x)[x,x]D(y)=0$$

بنابراین به‌ازای هر x و y در A

$$f(x)yf(x)-f(x)^2y+[f(x),x]B(x,y)+D(x)[y,x]f(x)+f(x)D(x)[y,x]=0 \tag{۱۱.۳}$$

بطور مشابه با قرار دادن $z=x$ در رابطهٔ ۱۰.۳ داریم

$$B(x,y)[x,f(x)]+[f(x),y]B(x,x)+D(y)[x,x]f(x)+[y,x]D(x)f(x)+$$

$$f(x)D(y)[x,x]+f(x)[y,x]D(x)=0$$

پس

$$B(x,y)[x,f(x)]+f(x)yf(x)-yf(x)^2+[y,x]D(x)f(x)+f(x)[y,x]D(x)=0 \tag{۱۲.۳}$$

حال نشان می‌دهیم دو رابطهٔ اخیر و رابطهٔ ۲.۳ ایجاب می‌کند که به‌ازای هر $x\in A$، $[f(x),x]=0$ یا $f(x)D(x)=0$.

با تبدیل y به x در رابطهٔ ۱۲.۳ داریم

$$B(x,x)[x,f(x)]+f(x)xf(x)=0 \qquad \forall\, x\in A$$

$$\Rightarrow f(x)xf(x)+f(x)xf(x)-f(x)^2x-2f(x)xf(x)=0 \Rightarrow f(x)xf(x)=0$$

در نتیجه

$$[f(x),x]f(x)=f(x)xf(x)-xf(x)^2=f(x)xf(x)-f(x)^2x=f(x)[f(x),x]=0$$

$$\Rightarrow [f(x),x]f(x)=0=f(x)[f(x),x] \qquad \forall\, x\in A \tag{۱۳.۳}$$

حال رابطهٔ ۱۱.۳ را از سمت چپ در $f(x)$ ضرب می‌کنیم. در اینصورت داریم

$$f(x)^{2}yf(x)-f(x)[f(x),x]B(x,y)+f(x)D(x)[y,x]f(x)+f(x)^{2}D(x)[y,x]=0$$

$$\Rightarrow f(x)D(x)[y,x]f(x)=0 \qquad \forall\, x,y\in A \tag{۱۴.۳}$$

حال اگر y را به $yf(x)D(x)z$ تبدیل کنیم داریم

$$\begin{aligned} 0 &= f(x)D(x)[yf(x)D(x)z,x]f(x)\\ &= f(x)D(x)yf(x)D(x)zxf(x)-f(x)D(x)xyf(x)D(x)zf(x)\\ &= f(x)D(x)[y,x]f(x)D(x)zf(x)+f(x)D(x)y[f(x)D(x),x]zf(x)+\\ &\qquad f(x)D(x)yf(x)D(x)[z,x]f(x)\end{aligned}$$

بنابر رابطهٔ ۱۴.۳ اولین و سومین جمعوند در عبارت آخر صفر است.پس

$$f(x)D(x)y[f(x)D(x),x]zf(x)=0$$

بنابراین

$$.f(x)D(x)A[f(x)D(x),x]Af(x)=0$$

چون A اول است پس $f(x)=0$ یا $[f(x)D(x),x]=0$ یا $f(x)D(x)=0$. در هر حالت نتیجه می‌شود $[f(x)D(x),x]=0$.

از طرف دیگر به‌ازای هر $x\in A$،

$$\begin{aligned}[f(x),x]D(x) &= f(x)xD(x)-xf(x)D(x)\\ &= f(x)[x,D(x)]+[f(x)D(x),x]\\ &= [f(x)D(x),x]-\tfrac{1}{2}f(x)^{2}\\ &= 0\end{aligned} \tag{۱۵.۳}$$

چون $f(x)xf(x)=0$ پس با ضرب رابطهٔ ۱۲.۳ از سمت راست در $f(x)$ داریم

$$f(x)yf(x)^{2}+B(x,y)[x,f(x)]f(x)+[y,x]D(x)f(x)^{2}+f(x)[y,x]D(x)f(x)=0$$

$$\Rightarrow f(x)[y,x]D(x)f(x)=0$$

با قرار دادن $yD(x)f(y)z$ به جای y در رابطهٔ فوق و با روندی مشابه نتیجه می‌شود

$$D(x)[f(x),x]=0 \qquad \forall\, x\in A \tag{۱۶.۳}$$

داریم

$$B(x,yx)=B(x,y)x+yf(x)+[y,x]D(x)$$

با جاگذاری yx به جای y در ۱۱.۳ داریم

$$f(x)yxf(x)+[f(x),x]B(x,yx)+D(x)[yx,x]f(x)+f(x)D(x)[yx,x]=0$$

$$f(x)yxf(x)+[f(x),x]B(x,y)x+[f(x),x]yf(x)+[f(x),x][y,x]D(x)$$

$$+D(x)[yx,x]f(x)+f(x)D(x)[yx,x]=0 \tag{۱۷.۳}$$

بنابر رابطهٔ ۱۱.۳ مجموع جملات دوم و آخر برابراست با $-f(x)yf(x)x - D(x)[y,x]f(x)x$.
پس به‌ازای هر x و y در A داریم

$$f(x)y[x,f(x)] + [f(x),x]yf(x) + [f(x),x][y,x]D(x) + D(x)[y,x][x,f(x)] = 0 \quad (۱۸.۳)$$

حال اگر در ۱۸.۳ y را به $yD(x)$ تبدیل کنیم داریم

$$f(x)yD(x)[x,f(x)] + [f(x),x]yD(x)f(x) + [f(x),x][yD(x),x]D(x)+$$

$$D(x)[yD(x),x][x,f(x)] = 0$$

$$\Rightarrow f(x)yD(x)[x,f(x)] + [f(x),x]yD(x)f(x) + [f(x),x]y[D(x),x]D(x)+$$

$$[f(x),x][y,x]D(x)^2 + D(x)[y,x]D(x)[x,f(x)] + D(y)[D(x),x][x,f(x)] = 0 \quad (۱۹.۳)$$

با توجه به روابط ۱۶.۳ و ۱۳.۳ داریم

$$[f(x),x]yD(x)f(x) + \frac{1}{2}[f(x),x]yf(x)D(x) + [f(x),x][y,x]D(x)^2 = 0$$

از طرف دیگر اگر رابطهٔ ۱۸.۳ را از سمت راست در $D(x)$ ضرب کنیم داریم

$$f(x)y[x,f(x)]D(x) + [f(x),x]yf(x)D(x) + [f(x),x][y,x]D(x)^2+$$

$$D(x)[y,x][x,f(x)]D(x) = 0$$

$$\Rightarrow [f(x),x][y,x]D(x)^2 = -f(x)y[x,f(x)]D(x) - [f(x),x]yf(x)D(x)- \quad (۲۰.۳)$$

$$D(x)[y,x][x,f(x)]D(x)$$

با مقایسهٔ دو رابطهٔ فوق و بکاربردن رابطهٔ ۱۵.۳ داریم

$$[f(x),x]yD(x)f(x) + \frac{1}{2}[f(x),x]yf(x)D(x) - [f(x),x]yf(x)D(x) =$$

$$= [f(x),x]yD(x)f(x) - \frac{1}{2}[f(x),x]yf(x)D(x) =$$

$$= [f(x),x]y\left(D(x)f(x) - \frac{1}{2}f(x)D(x)\right) = 0 \qquad \forall\, x,y \in A. \quad (۲۱.۳)$$

با روندی مشابه فوق(ابتدا جاگذاری $D(x)y$ به جای y در رابطهٔ ۱۸.۳ و بکاربردن رابطه های ۱۳.۳،۱۵.۳ و ۱۶.۳ ومقایسه با ۱۸.۳ که از طرف چپ در $D(x)$ ضرب شده است) داریم

$$\left(f(x)D(x) - \frac{1}{2}D(x)f(x)\right)y[x,f(x)] = 0 \qquad \forall\, x,y \in A \quad (۲۲.۳)$$

فرض کنید $x \in A$. چون A اول است از ۲۱.۳ و ۲۲.۳ نتیجه می‌شود $[f(x),x] = 0$ یا $D(x)f(x) = \frac{1}{2}f(x)D(x)$ و $f(x)D(x) = \frac{1}{2}D(x)f(x)$.

در حالت اخیر $[D(x),x]D(x)=f(x)D(x)=0=D(x)f(x)$. بنابر این A بصورت اجتماع دو زیر مجموعه اش یعنی $A_1=\{x\in A|\ [[D(x),x],x]=0\}$ و $A_2=\{x\in A|\ [D(x),x]D(x)=0\}$ می‌توان نوشت.

(فرض خلف) فرض کنید $D\neq 0$.

بنابر قضیهٔ ۳.۱.۱۸ $A_1\neq A$ و $A_2\neq A$. بنابراین $x,y\in A$ موجودند بطوریکه $x\notin A_1$ و $y\notin A_2$. بنابراین $x\in A_2$ و $y\in A_1$.

حال عضو $x+\lambda y(\lambda\in\mathbb{C})$ را در نظر بگیرید. اگر این عضو در A_1 قرار داشته باشد داریم

$$\begin{aligned}
0 &= [[D(x+\lambda y),x+\lambda y],x+\lambda y]=\\
&= [D(x+\lambda y),x+\lambda y](x+\lambda y)-(x+\lambda y)[D(x+\lambda y),x+\lambda y]=\\
&= [[D(x),x],x]+\lambda[[D(x),x],y]+[[\lambda D(y),x],x]+[[\lambda D(y),x],\lambda y]+\\
&\qquad [\lambda[D(x),y],x]+[\lambda[D(x),y],\lambda y]+[\lambda^2[D(y),y],x]+\\
&\qquad [\lambda^2[D(y),y],\lambda y]=\\
&= [[D(x),x],x]+\lambda\{[[D(x),x],y]+[[D(y),x],x]+[[D(x),y],x]\}+\\
&\qquad\qquad +\lambda^2\{[[D(y),x],y]+[[D(x),y],y]+[[D(y),y],x]\}+\\
&\qquad\qquad +\lambda^3\{[[D(y),y],y]\}
\end{aligned}\tag{۲۳.۳}$$

بطریق مشابه اگر این عضو در A_2 قرار داشته باشد داریم

$$\begin{aligned}
&\lambda\{[D(x),x]D(y)+[D(x),y]D(x)+[D(y),x]D(x)\}+\\
&+\lambda^2\{[D(x),y]D(y)+[D(y),x]D(y)+[D(y),y]D(x)\}\\
&+\lambda^3[D(y),y]D(y)=0
\end{aligned}\tag{۲۴.۳}$$

بنابر این به‌ازای هر $\lambda\in\mathbb{C}$ (چون $x+\lambda y\in A$) یکی از دو حالت فوق برقرار است. بنابراین یا معادلهٔ اول بیش از دو ریشه دارد یا معادلهٔ دوّم بیش از سه ریشه دارد و این با فرض $[[D(x),x],x]\neq 0$ و $[D(y),y]D(y)\neq 0$ متناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است پس $D=0$ و حکم ثابت می‌شود. $\square$

قضیه ۲۰.۱.۳ . (ووکمن ۱۹۹۲)
فرض کنید A یک جبر باناخ غیرجابجائی و D یک اشتقاق ژوردان پیوسته روی A باشد. اگربه‌ازای هر $x\in A$، $[[[D(x),x],x],x]\in \mathrm{rad}(A)$ آنگاه $D(A)\subseteq\mathrm{rad}(A)$.

اثبات.
ر. ک. قضیهٔ ۲ [۵۰]. $\square$

قضیه ۲۱.۱.۳ . (برِسار، ۱۹۹۴)
فرض کنید D یک اشتقاق کراندار روی جبر باناخ A باشد. همچنین فرض کنید به‌ازای هر $x\in A$، $[D(x),x]\in Q(A)$ آنگاه برد D داخل $\mathrm{rad}(A)$ قرار می‌گیرد.

اثبات.
ر. ک. [۶]. $\square$

بوضوح قضیهٔ فوق، قضیهٔ ۳.۱.۱۹ را نتیجه می‌دهد. نتیجهٔ دیگر قضیهٔ فوق بصورت زیر است.

فرض کنید D یک اشتقاق کراندار روی جبر باناخ A باشد بطوریکه به‌ازای هر $x \in A$، $[[D(x), x], x] = ۰$. بنابر قضیهٔ کلینکِ- شیرکوف $[D(x), x] \in Q(A)$. پس بنابر قضیهٔ فوق $D(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$.

این نتیجه صورت آنالیزی قضیه ای است که ووکمن [۵۲] درمورد اشتقاقهای روی حلقه های اول ثابت کرده است.

قضیه ۲۲.۱.۳ . *فرض کنید D یک اشتقاق کراندار روی جبر باناخ A باشد. اگر $x \in A$ و به‌ازای هر $y \in A$، $[D(x), D(y)] \in \mathrm{rad}(A)$ آنگاه $D(x) \in \mathrm{rad}(A)$.*

اثبات.

فرض کنید P یک ایدآل اولیهٔ A باشد. بنابر قضیهٔ سینکلر(۱.۶.۱۶) P تحت D پایاست. فرض کنید D_P اشتقاق القا شده توسط D روی A/P باشد.

چون به‌ازای هر $y \in A$، $[D(x), D(y)] \in \mathrm{rad}(A)$، پس به‌ازای هر $y \in A$،

$$[D_P(x+P), D_P(y+P)] = ۰.$$

بنابر قضیهٔ دوم پوسنر(۳.۱.۷) $D_P(x+P) \in Z(A/P)$ یا $D_P = ۰$. در هر حالت چون مرکز A/P بدیهی است پس $D_P^۲(x+P) = ۰$. بنابر قضیهٔ ۳.۱.۸ $D_P(x+P)$ شبه پوچتوان است. چون $D_P(x+P)$ اسکالر و شبه پوچتوان است پس صفر است. بنابراین $D(x) \in P$. چون P یک ایدآل اولیه دلخواه بود پس $D(x) \in \mathrm{rad}(A)$. □

قضیه ۲۳.۱.۳ .

فرض کنید D یک اشتقاق پیوسته روی جبر باناخ A باشد. اگر $a \in A$ در شرط $[D(a), a] = ۰$ صدق کند آنگاه $D(a)$ شبه پوچتوان است.

اثبات.

داریم

$$[L_a, [L_a, D]] = -[L_a, L_{D(a)}] = -L_{[a, D(a)]} = ۰$$

پس بنابر قضیهٔ کلینِکِ- شیرکوف $r([L_a, D]) = ۰$. داریم

$$۰ = r([L_a, D]) = r\left(L_{D(a)}\right) = r(D(a))$$

پس $D(a)$ شبه پوچتوان است و حکم ثابت می‌شود. □

۲.۳ حدس سینگر- ورمر غیر جابجائی

در این بخش تعمیمهای ارائه شده برای حدس سینگر- ورمر را بررسی می کنیم.

لم ۱.۲.۳ .

فرض کنید D یک اشتقاق روی جبر باناخ A و Q یک ایدآل اولیهٔ A باشد. آنگاه ایدآل اول مینیمال $P \subseteq Q$ موجود است به قسمیکه $D(P) \subseteq P$. بعلاوه یا P بسته است یا $D(\overline{P}) \subseteq \overline{P}$ و اشتقاق القا شدهٔ $D_{\overline{P}}$ روی جبر باناخ $A/\overline{P}$ پیوسته است. در حالت اخیر داریم $D(Q) \subseteq Q$.

اثبات.
چون Q ایدآل اولیه است پس یک ایدآل اول است. بنابر [۳۰] ایدآل اول مینیمال $P \subseteq Q$ موجود است. بنابر قضیهٔ ۱.۶.۱۸ $D(P) \subseteq P$.همچنین بنابر لم ۱.۷.۳ یا P بسته است یا $\mathcal{S}(D) \subseteq P$.
اگر P بسته نباشد آنگاه $\mathcal{S}(D) \subseteq P$. بنابر لم ۱.۷.۴

$$\mathcal{S}(Q_{\overline{P}} \circ D) = \overline{Q_{\overline{P}}\mathcal{S}(D)} = \{\circ\}$$

بنابراین $Q_{\overline{P}} \circ D$ پیوسته است.پس $(Q_{\overline{P}} \circ D)(\overline{P}) = \{\circ\}$. پس $D(\overline{P}) \subseteq \overline{P}$. حال می‌توانیم اشتقاق القا شدهٔ $D_{\overline{P}}$ روی $A/\overline{P}$ را در نظر بگیریم. چون $\mathcal{S}(Q_{\overline{P}} \circ D) = \{\circ\}$ پس $\mathcal{S}(D_{\overline{P}}) = \{\circ\}$. بنابراین $D_{\overline{P}}$ یک اشتقاق کراندار است و چون $Q/\overline{P}$ یک ایدآل اولیهٔ $A/\overline{P}$ است پس بنابر قضیهٔ ۱.۶.۱۶ $D_{\overline{P}}(Q/\overline{P}) \subseteq Q/\overline{P}$. بنابراین $D(Q) \subseteq Q$. □ در سال ۱۹۹۲ ماتیو و رونده شرط پیوستگی را در قضیهٔ ۳.۱.۱۵ حذف کردند.

قضیه ۲.۲.۳ . (*ماتیو- رونده ۱۹۹۱*)
فرض کنید D یک اشتقاق روی جبر باناخ A باشد. اگر D مرکزساز باشد آنگاه $D(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$.

اثبات.
به‌ازای هر ایدآل بستهٔ I که تحت D پایا باشد فرض کنید D_I اشتقاق القا شده روی جبر باناخ $A_I = A/I$ باشد.
اگر D مرکزساز باشد D_I نیز چنین است زیرا

$$\begin{aligned}
[x+I, D_I(x+I)] &= [x+I, D(x)+I] \\
&= (x+I)(D(x)+I) - (D(x)+I)(x+I) \\
&= xD(x) - D(x)x + I \\
&= [x, D(x)] + I \in Z(A/I)
\end{aligned}$$

فرض کنید Q یک ایدآل اولیه A باشد. بنابر لم فوق ایدآل اولیهٔ مینیمال $P \subseteq Q$ موجود است که تحت D پایاست.
ابتدا فرض کنید P بسته باشد. چون A_P اول است طبق قضیهٔ ۳.۱.۷ $D_P = \circ$ یا A_P جابجائی است. در حالت اخیر بنابر قضیهٔ ۲.۳.۲ $D_P(A_P) \subseteq \mathrm{rad}(A_P)$. پس در هر دو حالت $D_P(A_P) \subseteq Q_P$. در نتیجه $D(A) \subseteq Q$.
اگر P بسته نباشد $D(\overline{P}) \subseteq \overline{P}$ و $D_{\overline{P}}$ پیوسته است. در نتیجه $D_{\overline{P}}$ یک اشتقاق مرکزساز کراندار است بنابر قضیهٔ ۳.۱.۱۵ $D_{\overline{P}}(A_{\overline{P}}) \subseteq \mathrm{rad}(A_{\overline{P}}) \subseteq Q_{\overline{P}}$.
بنابراین $D(A) \subseteq Q$. پس به‌ازای هر ایدآل اولیهٔ Q، $D(A) \subseteq Q$. بنابراین $D(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$.
□

نتیجه ۳.۲.۳ .
فضای جداساز هر اشتقاق مرکزساز داخل رادیکال قرار می‌گیرد.

اثبات.
داریم $\mathcal{S}(D) \subseteq \overline{D(A)}$. چون رادیکال بسته است پس بنابر قضیهٔ فوق حکم بدیهی است. □
زمانک [۵۵] سئوال زیر را مطرح کرد:
فرض کنید D یک اشتقاق روی جبر باناخ A و $\sup_{x\in G(A)} r(x^{-1}Dx) < \infty$. آیا $D(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$؟

وی در همان مقاله به سئوال فوق در حالتی که D اشتقاق درونی باشد جواب مثبت داد. برسار و ماتیو [۷] حکم فوق را برای اشتقاقهای دلخواه ثابت کردند.

قضیه ۴.۲.۳ . (برسار- ماتیو ۱۹۹۵)
فرض کنید D یک اشتقاق روی جبر باناخ یکدار A باشد. $D(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$ *اگر و تنها اگر* $\sup\{r(z^{-1}Dz) | \ z \in G(A)\} < \infty$.

اثبات.
ر. ک. [۷] قضیهٔ ۲.۶. □

قضیه ۵.۲.۳ .
اگر به‌ازای هر $x \in A$، $[D(x), x]D(x) \in \mathrm{rad}(A)$ *آنگاه برد D داخل رادیکال A قرار می‌گیرد.*

اثبات.
ر. ک. [۵۳]. □

لم ۶.۲.۳ .
فرض کنید D یک اشتقاق روی جبر باناخ A و $a \in A$. *اگر* $D(a) \in Z(A)$ *آنگاه* $D(a) \in \mathrm{rad}(A)$.

اثبات.
فرض کنید $S = \{a, D^n(a) | n \geq ۱\}$. بوضوح $D(S) \subseteq S$. بنابر فرض S یک زیر مجموعهٔ جابجائی A است. بنا بر لم ۱.۲.۵ $C(C(S))$ یک جبر باناخ جابجائی حاوی S است و $D(C(C(S))) \subseteq C(C(S))$.
بوضوح اگر D را به $C(C(S))$ تحدید کنیم آنگاه یک اشتقاق روی جبر باناخ جابجائی $C(C(S))$ داریم. بنابر قضیهٔ ۲.۳.۲ برد D داخل رادیکال $C(C(S))$ قرار می‌گیرد. پس $D(a)$ شبه پوچتوان است. چون $D(a) \in Z(A)$ پس بنابر قضیهٔ ۱.۵.۱۰(ب) به‌ازای هر $y \in A$،

$$r\left(D(a)y\right) \leq r(D(a))r(y) = ۰.$$

یعنی $D(a)y$ شبه پوچتوان است. پس بنابر قضیهٔ ۱.۵.۱۲ ، $D(a) \in \mathrm{rad}(A)$. □

لم ۷.۲.۳ .
(چنگ) اگر D یک اشتقاق روی حلقهٔ اول R از مشخصهٔ مخالف ۲ باشد به قسمیکه به‌ازای هر $x, y \in R$، $[D(x), D(y)] \in Z(R)$، *آنگاه* $D = ۰$ *یا R جابجائی است.*

اثبات.
ر. ک. [۹]. □

قضیه ۸.۲.۳ . (کریدون ، ۱۹۹۵)[۱۱]
اگر D یک اشتقاق روی جبر باناخ A باشد بطوریکه به‌ازای هر $x, y \in A$، $[D(x), D(y)] \in Z(A)$ *آنگاه* $D(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$.

اثبات.
اگر D کراندار باشد آنگاه چون بنابه‌فرض به‌ازای هر $x, y \in A$ ، $[D(x), D(y)] \in Z(A)$ پس بنابر لم ۳.۲.۶ به‌ازای هر $x, y \in A$ ، $[D(x), D(y)] \in \mathrm{rad}(A)$. پس بنابر لم ۳.۱.۲۲ به‌ازای هر $x \in A$، $D(x) \in \mathrm{rad}(A)$.

برای اثبات حالت کلی فرض کنید Q یک ایدآل اولیه A باشد. بنابر لم ۳.۲.۱ یک ایدآل اول مینیمال ناصفر $P \subseteq Q$ موجود است به قسمیکه $D(P) \subseteq P$ بطوریکه P بسته است یا $D(\overline{P}) \subseteq \overline{P}$ و $D_{\overline{P}}$ یک اشتقاق کراندار روی جبر باناخ $A/\overline{P}$ است.

ابتدا فرض کنید P بسته باشد. اشتقاق القا شدهٔ D_P را روی A/P در نظر بگیرید. چون به‌ازای هر $x, y \in A$، $[D_P(x+P), D_P(y+P)] \in Z\,(A/P)$ بنابر قضیهٔ ۳.۲.۷ $D_P = 0$ یا A/P جابجائی است. در حالت دوم بنابر اثبات حدس سینگر- ورمر $D_P\,(A/P) \subseteq \mathrm{rad}\,(A/P) \subseteq Q/P$. پس در هر دو حالت $D_P\,(A/P) \subseteq Q/P$. بنابراین $D(A) \subseteq Q$.

حال فرض کنید P بسته نباشد. چون $D_{\overline{P}}$ یک اشتقاق کراندار است و $[D_{\overline{P}}(x+\overline{P}), D_{\overline{P}}(y+\overline{P})] \in Z\,(A/\overline{P})$ پس $D_{\overline{P}}\,(A/P) \subseteq \mathrm{rad}\,(A/\overline{P}) \subseteq Q/\overline{P}$ پس $D(A) \subseteq Q$. پس در هر حالت $D(A) \subseteq Q$ چون Q یک ایدآل اولیهٔ دلخواه بود پس $D(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$. □

کریدون حدس زد که اگر به‌ازای هر $x, y \in A$، $[D(x), D(y)] \in \mathrm{rad}(A)$ آنگاه $D(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$. بنابر لم ۳.۱.۲۲ این حدس برای D های کراندار برقرار است. امّا در حالت کلی مسأله باز است. نشان خواهیم داد که این حدس با سایر حدسهای سینگر- ورمر غیر جابجائی معادل است.

قضیه ۹.۲.۳ . (*ماتیو ۱۹۹۱*)
فرض کنید D یک اشتقاق روی جبر باناخ A باشد. اگر به‌ازای هر $x \in A$، $[x, Dx] \in \mathrm{rad}(A)$ آنگاه $D(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$.

اثبات.
ر. ک. قضیهٔ ۲.۲ [۲۷]. □

قضیه ۱۰.۲.۳ . [۱۲]
فرض کنید D و G دو اشتقاق روی جبر A باشند بطوریکه حاصلضرب آنها نیز اشتقاق باشد. آنگاه $DG(A) \subseteq nil(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$.

اثبات.
ر. ک. قضیهٔ ۲ [۱۲]. □

قضیه ۱۱.۲.۳ .
اگر D یک اشتقاق روی جبر باناخ A باشد به قسمیکه D^2 یک اشتقاق ژوردان باشد آنگاه $D(A) \subseteq nil(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$.

اثبات.
ر. ک. قضیهٔ ۴ [۱۲]. □

قضیه ۱۲.۲.۳ .
فرض کنید D یک اشتقاق روی A و G یک اشتقاق پیوسته روی A باشد به قسمیکه به‌ازای هر $x, y \in A$، $[Dx, Gy] \in \mathrm{rad}(A)$. آنگاه $DG(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$.

اثبات.
ر. ک. قضیهٔ ۹ [۱۲]. □

تعریف ۱۳.۲.۳ .
فرض کنید A یک جبرباناخ و D یک اشتقاق روی A باشد. ایدآل اولیهٔ $P \subseteq A$ را استثنایی گوییم هرگاه $D(P) \nsubseteq P$. مجموعهٔ تمام ایدآلهای اولیهٔ استثنایی را با $\mathcal{E}_A(D)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۱۴.۲.۳ .
فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. اگر A یکدار باشد آنگاه

$$\sigma_A(a) = \cup_{P\in Prim(A)}\sigma_{A/P}(a+P) \qquad (a\in A)$$

و اگر A یکدار نباشد آنگاه

$$.\sigma_A(a) = \cup_{P\in Prim(A)}\sigma_{A/P}(a+P)\cup\{0\} \qquad (a\in A)$$

اثبات.
بنابر قضیهٔ ۲.۲.۹ [۳۶] بدیهی است. □

چون متناظر با هر ایدآل اولیهٔ P ، یک نمایش اکیداً تحویلناپذیر با هستهٔ P موجود است. لم ۳.۲.۱۴ را می‌توان بصورت زیر نیز نوشت.

قضیه ۱۵.۲.۳ .
اگر ϕ مجموعهٔ تمام نمایشهای اکیداً تحویلناپذیر غیر یکریخت π روی جبر باناخ A باشد آنگاه به‌ازای هر $b\in A$ داریم

$$.\sigma(b)\subseteq(\cup_{\pi\in\phi}\sigma(\pi(b)))\cup\{0\}$$

در برخی قضایای بخش قبل می‌توان شرط پیوستگی را با شرط $\mathcal{E}_A(D)=\emptyset$ جایگزین کرد زیرا در اثبات این قضایا از قضیهٔ سینکلر استفاده می‌شود که با فرض فوق می‌توان اثبات بدون تغییر باقی می‌ماند. قضیهٔ زیر نمونه‌ای از این جایگزینی است. قضیهٔ زیر به سئوال (ب) با قرار دادن یک شرط اضافی پاسخ مثبت می‌دهد.

قضیه ۱۶.۲.۳ .
فرض کنید A یک جبر باناخ و D یک اشتقاق روی A باشد به قسمیکه $\mathcal{E}_A(D)=\emptyset$ و فرض کنید $a\in A$ به قسمیکه $[a,Da]=0$. در اینصورت Da شبه پوچتوان است.

اثبات.
فرض کنید $P\subseteq A$ یک ایدآل اولیه باشد. بنابه فرض $D(P)\subseteq P$ پس D_P خوشتعریف است. چون A/P نیمساده است پس D_P کراندار است. بنابر قضیهٔ ۳.۱.۲۳ $D_P(\pi_P(a))=\pi_P(D(a))$ شبه پوچتوان است(π_P برووریختی متعارف است) پس $\sigma_{A/P}(\pi_P(D(a)))=\{0\}$. بنابر لم ۳.۲.۱۴ داریم

$$\sigma_A(D(a))\subseteq\cup_{P\in Prim(A)}\sigma_{A/P}(\pi_P(D(a)))\cup\{0\}=\{0\}$$

پس $D(a)$ شبه پوچتوان است و حکم اثبات می‌شود. □

قضیه ۱۷.۲.۳ .
فرض کنید A یک جبر باناخ و D یک اشتقاق روی A باشد. آنگاه $\mathcal{E}_A(D)$ حاوی تعداد متناهی ایدآل اولیه است که هرکدام از آنها از همبعدی متناهی است.

اثبات.
ر. ک. قضیهٔ ۱.۱۰ [۴۷]. □

نتیجه ۱۸.۲.۳ .
اگر A یک جبر باناخ و D یک اشتقاق روی A باشد و $a\in A$ به قسمیکه $D^2(a)=0$ آنگاه $\sigma(D(a))$ متناهی است.

اثبات.

فرض کنید P یک ایدآل اولیه باشد به قسمیکه $D(P) \subseteq P$. فرض کنید D_P اشتقاق متناظر با Dروی A/P باشد. چون A/P نیمساده است پس D_P کراندار است. چون $D^{۲}(a) = ۰$، بوضوح به‌ازای $k \geq ۲$، $D_P^k(a+P) = ۰$. بنابرقضیهٔ ۱.۶.۷

$$\begin{aligned} \|(D_P(a+P))^n\|^{\frac{۱}{n}} &= \left\|\tfrac{۱}{n!}D_P^n\left((a+P)^n\right)\right\|^{\frac{۱}{n}} \\ &= (n!)^{-\frac{۱}{n}}\left\|D_P^n\left((a+P)^n\right)\right\|^{\frac{۱}{n}} \\ &\leq (n!)^{-\frac{۱}{n}}\|D_P\|\|(a+P)^n\|^{\frac{۱}{n}} \mapsto ۰ (n \mapsto \infty) \end{aligned} \tag{۲۵.۳}$$

بنابراین $D_P(a+P) = D(a)+P$ شبه پوچتوان است(نسبت به A/P) یعنی $\sigma_{A/P}(D_P(a+P)) = \{۰\}$. چون تعداد متناهی ایدآل اولیه در شرط $D(P) \subseteq P$ صدق نمی‌کنند و این ایدآلها نیز دارای همبعدی متناهی است پس بنابر قضیهٔ قبل $\sigma_A(Da)$ متناهی است و حکم ثابت می‌شود. □

لم ۱۹.۲.۳ .

فرض کنید A یک جبر باناخ و D یک اشتقاق روی A باشد. اگر $a \in A$ به قسمیکه $[a, D(a)] = ۰$ آنگاه $\sigma(D(a))$ متناهی است.

اثبات.

فرض کنید P یک ایدآل اولیهٔ A باشد. اگر P استثنایی نباشد آنگاه بنابر اثبات قضیهٔ ۳.۲.۱۶ $\sigma_{A/P}\left(\pi_P(D(a))\right) = \{۰\}$ (π_P بروریختی متعارف است)

اگر P استثنایی باشد، A/P متناهی- بعد است. در نتیجه $\sigma_{A/P}\left(\pi_P(D(a))\right)$ متناهی است. بنابر لم ۳.۲.۱۴

$$\begin{aligned} \sigma_A(D(a)) &\subseteq \cup_{P\in Prim(A)}\sigma_{A/P}\left(\pi_P(D(a))\right) \cup \{۰\} \\ &= \cup_{P\in \mathcal{E}_A(D)}\sigma_{A/P}\left(\pi_P(D(a))\right) \cup \{۰\} \end{aligned}$$

حال چون تعداد متناهی ایدآل اولیه استثنایی داریم پس $\sigma_A(D(a))$ متناهی است. □

در سال ۱۹۹۳ توماس به سئوال الف فوق الذکر جواب مثبت داد. اثبات توماس در ادامه می‌آید.

قضیه ۲۰.۲.۳ . (*توماس ۱۹۹۳*)

فرض کنید A یک جبر باناخ و D یک اشتقاق روی A باشد. اگر $a \in A$ به قسمیکه $D^{۲}(a) = ۰$ آنگاه $\sigma(D(a)) = \{۰\}$ ($D(a)$ شبه پوچتوان است).

اثبات.

فرض کنید $\lambda \neq ۰$ و $\lambda \in \sigma(D(a))$.

بنابر نتیجهٔ ۳.۲.۱۸ $\sigma(D(a))$ متناهی است پس تابع تحلیلی f روی یک همسایگی $\sigma(D(a))$ موجود است به قسمیکه روی یک همسایگی $\{\lambda\}$ مقدار ۱ را دارد ولی روی یک همسایگی $\sigma(D(a))\backslash\{\lambda\}$ صفر است. (f را می‌توان حد یکنواخت توابع تحلیلی $f_m(\xi) = (۱ - k^m(\xi-\lambda)^m)^{-۱}$ در نظر گرفت که k به اندازهٔ کافی کوچک روی یک همسایگی ناهمبند $\sigma(D(a))$ انتخاب می‌شود). بنابراین $f^{۲} = f$ پس $e = f(D(a))$ خودتوان است و با $D(a)$ جابجا می‌شود. چون e تصویر تحلیلی $D(a)$ است پس با هر عضوی از A که با $D(a)$ جابجا شود، جابجا می‌شود. بعلاوه eAe یک زیر جبر بستهٔ A با عضو همانی e است. داریم

$$.eD(a)e = e^{۲}D(a) = eD(a)$$

همچنین داریم

$$\sigma_{eAe}(eD(a)e) = \sigma_{eAe}(eD(a)) = \{\lambda\}$$

چون e عضو همانی eAe است بوضوح

$$\sigma_{eAe}(eD(a)e - \lambda e) = \{0\}$$

پس $s = eD(a)e - \lambda e$ یک عضو شبه پوچتوان eAe است.

فرض کنید S زیر جبر جابجائی(غیربسته) تولید شده توسط $D(a)$ باشد. چون $D^2(a)$=0 بوضوح $D(S) = \{0\}$. بنابراین $D(S) \subseteq S$. داریم

$$.D(e) = D(e^2) = eD(e) + D(e)e$$

چون $e \in C(S) \cap C(C(S))$ بنابر لم ۱.۶.۱۷ $D(e)$ در زیرجبر جابجائی و بستهٔ $C(S) \cap C(C(S))$ قرار می‌گیرد(یک بار لم را برای S و بار دیگر برای $C(S)$ به کار می‌بریم). چون e خودتوان است و e و $D(e)$ جابجا می‌شوند پس

$$eD(e) = e(eD(e) + D(e)e) = e(2eD(e)) = 2eD(e)$$

پس $eD(e) = 0$. بنابراین

$$D(e) = D(e^2) = eD(e) + D(e)e = 2eD(e) = 0$$

همچنین

$$\begin{aligned} D(eae) &= D(e)ae + eD(ae) \\ &= D(e)ae + eD(a)e + eaD(e) \\ &= 0 + eD(a)e + 0 \\ &= \lambda e + s \end{aligned} \tag{۲۶.۳}$$

همچنین

$$\begin{aligned} D^2(eae) &= D(D(eae)) \\ &= D(eD(a)e) \\ &= D(e)D(a)e + eD^2(a)e + eD(a)D(e) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{۲۷.۳}$$

بنا بر ۲۶.۳ داریم

$$0 = D^2(eae) = D(D(eae)) = D(\lambda e) + D(s) = \lambda D(e) + D(s)$$

پس $D(s) = 0$.

اشتقاق D_1 را روی جبر باناخ یکدار eAe را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$D_1(exe) = eD(exe)e \qquad \forall\, x \in A$$

براحتی می‌توان نشان داد که D_1 یک اشتقاق است. چون $D(e) = 0$ پس بوضوح

$$.D_1(exe) = eD(x)e$$

داریم

$$D_1(eae) = e(D(eae))e = e(\lambda e + s)e = \lambda e + s$$

همچنین $D_1(e) = D_1(e^3) = eD(e)e = 0$. با جاگذاری داریم $s = ese$. پس

$$D_1(s) = D_1(ese) = eD(s)e = 0$$

و

$$D_1^2(eae) = D_1(D_1(eae)) = D_1(eD(a)e) = eD^2(a)e = 0.$$

چون $\lambda \neq 0$ و e عضو یکهٔ eAe است و چون s شبه پوچتوان است پس $\lambda e+s$ در eAe وارونپذیر است(زیرا λ در طیف s نیست). پس

$$(\lambda e + s)(\lambda e + s)^{-1} = e$$

بنابراین

$$\begin{aligned} 0 &= D_1(e) \\ &= D_1\left((\lambda e + s)(\lambda e + s)^{-1}\right) \\ &= D_1(\lambda e + s)(\lambda e + s)^{-1} + (\lambda e + s)D_1((\lambda e + s)^{-1}) \\ &= (\lambda e + s)D_1((\lambda e + s)^{-1}) \end{aligned} \tag{۲۸.۳}$$

چون $\lambda e+s$ وارونپذیر است، با ضرب طرفین در وارون آن داریم $D_1((\lambda e+s)^{-1}) = 0$. حال تعریف می‌کنیم $t = (eae)(\lambda e + s)^{-1}$. داریم $t \in eAe$. همچنین

$$D_1(t) = D_1\left((eae)(\lambda e + s)^{-1}\right) = D_1(eae)(\lambda e + s)^{-1} = e$$

پس $D_1^2(t) = D_1(D_1(t)) = D_1(e) = 0$.

حال فرض کنید T زیرجبر یکدار و جابجائی(غیر بسته) تولید شده توسط e و t در eAe باشد. همچنین تعریف می‌کنیم

$$A_1 = C(T) \cap C(C(T))$$

که تعویضگر روی eAe در نظر گرفته شده است. چون T یک زیر جبر جابجائی است با بکاربردن لم ۱.۶.۱۷ واضح است که A_1 یک زیر جبر جابجائی بستهٔ eAe است. A_1 یکدار و حاوی t است زیرا $T \subseteq A_1$.

چون بوضوح T تحت D_1 پایاست، بنابر لم ۱.۶.۱۷ A_1 تحت D_1 پایاست. پس A_1 یک جبر باناخ جابجائی است و D_1 یک اشتقاق روی آن است. چون e شبه پوچتوان نیست پس در رادیکال A_1 قرار نمی‌گیرد پس $D_1(t) \notin \text{rad}(A_1)$ و این با اثبات حدس سینگر- ورمر(۲.۳.۲) متناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود. □

۳.۳ برد اشتقاقهایی که در اتحاد چند جمله‌ای صدق می‌کنند

حال تعمیمی از قضیهٔ ۳.۲.۲ ارائه می‌کنیم.

به‌ازای $n \in \mathbb{N}$، فرض کنید $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ جبر چند جمله ایها با n متغیر غیر جابجائی باشد(به عبارت دیگر جبر مختلط آزاد با n مولد).

فرض کنید A یک جبر مختلط باشد. اگر $a_1, \dots, a_n \in A$ به‌ازای یک $p \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ در شرط $p(a_1, \dots, a_n) = 0$ صدق کند آنگاه گوییم $a_1, \dots, a_n$ در اتحاد چندجمله ای صدق می کنند.

لم ۱.۳.۳ .
فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $p \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ دارای ویژگی زیر باشد:
اگر D یک اشتقاق روی جبر باناخ اولیه A باشد به قسمیکه به‌ازای هر $a \in A$،

$$p(a, D(a), \dots, D^n(a)) = 0$$

آنگاه $D = 0$. آنگاه هر اشتقاق D روی جبر باناخ A که $\mathcal{E}_A(D) = \emptyset$ و $p(a, D(a), \dots, D^n(a)) = 0$، A را به توی $rad(A)$ می‌نگارد.

اثبات.
فرض کنید D یک اشتقاق روی جبر باناخ A باشد به قسمیکه در شرایط قضیه صدق کند. همچنین فرض کنید P یک ایدآل اولیهٔ A باشدو D_P اشتقاق القا شده توسط D روی A/P باشد. بوضوح به‌ازای هر $u \in A/P$، $p(u, D_P(u), \dots, D_P^n(u)) = 0$. بنابر فرض $D_P = 0$. پس $D(A) \subseteq P$. چون P دلخواه بود پس $D(A) \subseteq rad(A)$ و حکم ثابت می‌شود. □

لم ۲.۳.۳ .
فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $p \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ دارای ویژگی زیر باشد:
اگر D یک اشتقاق روی جبر باناخ اول A باشد به قسمیکه به‌ازای هر $a \in A$، $p(a, D(a), \dots, D^n(a)) = 0$ آنگاه $D(A) \subseteq rad(A)$.
آنگاه هر اشتقاق D روی جبر باناخ A که $(\forall\, a \in A) \qquad p(a, D(a), \dots, D^n(a)) \in nil(A)$، A را به توی $rad(A)$ می‌نگارد.

اثبات.
ایدآل اولیهٔ دلخواه $P \subseteq A$ را در نظر بگیرید. P اول است پس حاوی ایدآل اول مینیمال Q است. بنابر لم ۱.۶.۱۸ $D(Q) \subseteq Q$. فرض کنید D_Q اشتقاق القا شده توسط D روی A/Q باشد.
دو حالت در نظر می‌گیریم:
حالت اول:

$$\mathcal{S}(D) \not\subseteq Q$$

بنابر لم ۱.۶.۱۸ Q بسته است و A/Q یک جبر باناخ اول است.چون

$$p(a, D(a), \dots, D^n(a)) \in nil(A) \subseteq Q \qquad (a \in A)$$

پس به‌ازای هر $u \in A/Q$، $p(u, D_Q(u), \dots, D_Q^n(u)) = 0$.
بنابر فرض داریم $D_Q(A/Q) \subseteq rad(A/Q) = rad(A)/Q \subseteq P/Q$. پس $D(A) \subseteq P$.
حالت دوم:

$$\mathcal{S}(D) \subseteq Q$$

فرض کنید $\pi : A \to A/\overline{Q}$ بروریختی متعارف باشد. آنگاه

$$\mathcal{S}(\pi \circ D) = \overline{\pi(\mathcal{S}(D))} = \{0\}$$

پس $\pi \circ D$ پیوسته است. چون $D(Q) \subseteq Q$ پس $(\pi \circ D)(Q) = \{0\}$ بنابراین $(\pi \circ D)(\overline{Q}) = \{0\}$. یعنی $\overline{Q}$ تحت D پایاست. پس اشتقاق $D_{\overline{Q}}$ خوشتعریف است. بوضوح به‌ازای هر $u \in A/\overline{Q}$، $p(u, D_{\overline{Q}}(u), \dots, D_{\overline{Q}}^n(u)) = 0$. پس بنابر لم ۳.۳.۱ داریم

$$D_{\overline{Q}}\left(A/\overline{Q}\right) \subseteq rad\left(A/\overline{Q}\right) \subseteq P/\overline{Q}$$

بنابراین $D(A) \subseteq P$ و حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۳.۳.۳ .

فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $p \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ دارای ویژگی زیر باشد:
اگر D یک اشتقاق روی جبر باناخ اول A باشد به قسمیکه به‌ازای هر $a \in A$، $p(a, D(a), \dots, D^n(a)) = 0$ آنگاه $D = 0$ یا A جابجائی باشد.
آنگاه هر اشتقاق D روی جبر باناخ A که‌به‌ازای هر $a \in A$، $p(a, D(a), \dots, D^n(a)) \in nil(A)$، A را به توی $rad(A)$ می‌نگارد.

اثبات.

نشان می‌دهیم شرایط لم فوق برقرار است.

فرض کنید A یک جبر باناخ اول باشد و D یک اشتقاق روی A باشد به قسمیکه به‌ازای هر $a \in A$، $p(a, D(a), \dots, D^n(a)) = 0$. اگر A جابجائی باشد بنابر قضیهٔ ۲.۳.۲ $D(A) \subseteq rad(A)$. اگر A جابجائی نباشد آنگاه $D = 0$ که بوضوح برد آن داخل رادیکال است. پس شرایط لم فوق برقرار است و لذا حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه ۴.۳.۳ .

فرض کنید A یک جبر باناخ و D یک اشتقاق روی A باشد به قسمیکه به‌ازای هر $a \in A$، $[a, [a, [a, D(a)]]] \in nil(A)$. در اینصورت برد D داخل $rad(A)$ قرار می‌گیرد.

اثبات.

بنابر قضیهٔ ۳.۱.۷ $p = [x_1, [x_1, [x_1, x_2]]]$ در شرایط قضیهٔ فوق صدق می‌کند. پس حکم برقرار است. □

یک سئوال جالب که اینجا مطرح می‌شود این است که آیا نتیجهٔ فوق را می‌توان به شرط ضعیف تر

$$[a, [a, [a, D(a)]]] \in rad(A) \qquad \forall\, a \in A$$

مشابه قضیهٔ ۳.۱.۲۰ برای حالت کراندار تبدیل کرد؟ البته شرط کرانداری را در ۳.۱.۲۰ میتوان با شرط $\mathcal{E}_A(D) = \emptyset$ جایگزین کرد. بنابراین اگر حدس سینگر- ورمر غیر جابجائی برقرار باشد آنگاه ۳.۱.۲۰ برای اشتقاقهای دلخواه برقرار است.

حال فرض کنید $\mathcal{R}$ یک جبر باناخ رادیکال باشد. به‌ازای هر اشتقاق D روی $\mathcal{R}^{\#}$ و هر $a = r + \lambda 1 \in \mathcal{R}^{\#} \quad r \in \mathcal{R}, \lambda \in \mathbb{C}$ داریم

$$[a, D(a)] = [r + \lambda 1, D(r + \lambda 1)] = [r, D(r)] \in \mathcal{R} = rad(\mathcal{R}^{\#}).$$

بالاخص شرط قضیهٔ ۳.۱.۲۰ (A را $\mathcal{R}^{\#}$ در نظر بگیرید) یعنی $[a, [a, [a, D(a)]]] \in rad(A)$، به‌ازای هر $a \in \mathcal{R}^{\#}$ برقرار است.

می‌توان صورت چند متغیرهٔ قضیهٔ فوق را نیز ثابت کرد. صورت قضیه به شکل زیر است.

قضیه ۵.۳.۳ .

فرض کنید $n, m, k \in \mathbb{N}$ و $k \leq m$ و $p \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_{nm+1}\}$ دارای ویژگی زیر باشد:
اگر $D_1, \dots, D_m$ اشتقاقهایی روی جبر باناخ اول A باشد به قسمیکه به‌ازای هر $a \in A$، $p(a, D_1(a), \dots, D_m(a), \dots, D_1^n(a), \dots, D_m^n(a)) = 0$ آنگاه $D_1 = \dots = D_k = 0$ یا A جابجائی

باشد.
آنگاه اگر $D_1, \dots, D_m$ اشتقاقهایی روی جبر باناخ A باشند بقسمیکه‌بازای هر $a \in A$،

$$p(a, D_1(a), \dots, D_m(a), \dots, D_1^n(a), \dots, D_m^n(a)) \in nil(A)$$

، برد $D_1, \dots, D_k$، A را به توی $rad(A)$ می‌نگارند.

اثبات.
با روندی مشابه اثبات قضیهٔ ۳.۳.۳ ثابت می‌شود. □

با استفاده از قضیهٔ ۳.۳.۳ بدست آوردن نتایجی در برد اشتقاقهای بیکران چندان مشکل نیست. بطور مثال قضیهٔ ۳.۱.۱۲ برای اشتقاقهای بیکران برقرار است. همچنین قضیهٔ ۳.۱.۹ نیز اگر شرط $nil(A)$ به $rad(A)$ تبدیل شود باز برقرار است.

حال صحت سئوال ب را بررسی می‌کنیم. در اینجا مسأله را برای aهایی بررسی می‌کنیم که اولاً شبه پوچتوان باشند و ثانیاً $D(a)$ وارونپذیر باشد.

قضیه ۶.۳.۳ .
احکام زیر معادلند:

(الف) جبر باناخ A و اشتقاق D روی A موجود است به قسمیکه به‌ازای یک $a \in A$، $[a, D(a)] = 0$ و $D(a) \notin Q(A)$.

(ب) جبر باناخ یکدار A و اشتقاق D روی A موجود است به قسمیکه به‌ازای یک $a \in Q(A)$، $[a, D(a)] = 0$ و $D(a)$ وارونپذیر است. در این حالت $Prim(A) = \mathcal{E}_A(D)$ و یک $r \in rad(A)$ موجود است به قسمیکه $[r, D(r)] = 0$ ولی $D(r) \notin rad(A)$.

اثبات.
ر. ک. قضیهٔ ۳.۲ از [۳۸]. □

حال فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $p \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ ویژگی زیر را داشته باشد:
اگر A یک جبر باناخ باشد و D یک اشتقاق کراندار روی A باشد و $a \in A$ بطوریکه $p(a, D(a), \dots, D^n(a)) = 0$ آنگاه $D(a)$ شبه پوچتوان باشد.

بنابر قضایای ۳.۱.۲۳ و ۳.۱.۸ $p = [x_1, x_2]$ و $p = x_2$ دارای این خواص است. با بررسی اثباتها می‌توان نشان داد که لم ۳.۲.۱۹ و قضیهٔ ۳.۳.۶ برای هر p که در شرایط فوق صدق کند برقرار است.

متاسفانه روش اثبات توماس برای قضیهٔ ۳.۲.۲۰ را نمی‌توان برای سئوال (ب) به کار برد. حال دو نگارش ضعیفتر از قضیهٔ کلینک-شیرکوف بیکران را که هر دو دارای فرضهای قوی تر از شرط $[a, D(a)] = 0$ نیاز دارند، بیان و ثابِت می‌کنیم.

قضیه ۷.۳.۳ .
فرض کنید A یک جبر باناخ و D یک اشتقاق روی A باشد. اگر $a \in A$ به قسمیکه $D(a) \in C(C(\{a\}))$ آنگاه $D(a)$ شبه پوچتوان است.

اثبات.
چون $\{a, D(a)\} \subseteq C(C(\{a\}))$ داریم

$$C\left(\{a, D(a)\}\right) \supseteq C\left(C\left(C(\{a\})\right)\right) = C(\{a\}).$$

از طرفی بوضوح $C(\{a, D(a)\} \subseteq C(\{a\})$. پس $C(\{a, D(a)\}) = C(\{a\})$. حال بنا بر لم ۱.۶.۱۷ چون $D(C(\{a, D(a)\})) \subseteq C(\{a, D(a)\})$. پس

$$D\left(C\left(C(\{a, D(a)\})\right)\right) \subseteq C\left(C\left(\{a, D(a)\}\right)\right).$$

بنا بر لم ۱.۶.۱۷ $C\left(C\left(\{a, D(a)\}\right)\right)$ یک جبر باناخ جابجائی حاوی a است که بنابر فوق تحت D پایاست.

بنابر قضیهٔ ۲.۳.۲ D ، $C\left(C\left(\{a, D(a)\}\right)\right)$ را به توی رادیکال آن می‌نگارد. بالاخص $D(a)$ شبه پوچتوان است. □

قضیه ۸.۳.۳ . [۳۸]

فرض کنید A یک جبر باناخ و D یک اشتقاق روی A باشد. اگر $a \in A$ به قسمیکه به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $[a, D^n(a)] = 0$ آنگاه $D(a)$ شبه پوچتوان است.

اثبات.

ابتدا با استقرا ثابت می‌کنیم به‌ازای هر $m, n \in \mathbb{N}$، $[D^m(a), D^n(a)] = 0$.

به‌ازای $m = 0$ حکم بنا به فرض بدیهی است.

فرض کنید $m > 0$ و به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $[D^{m-1}(a), D^n(a)] = 0$ آنگاه

$$\begin{aligned} 0 &= D\left([D^{m-1}(a), D^n(a)]\right) \\ &= D\left(D^{m-1}(a)D^n(a) - D^n(a)D^{m-1}(a)\right) \\ &= D\left(D^{m-1}(a)D^n(a)\right) - D\left(D^n(a)D^{m-1}(a)\right) \\ &= D^m(a)D^n(a) + D^{m-1}(a)D^{n+1}(a) - D^{n+1}(a)D^{m-1}(a) - D^n(a)D^m(a) \\ &= [D^m(a), D^n(a)] + [D^{m-1}(a), D^{n+1}(a)] \\ &= [D^m(a), D^n(a)] \end{aligned} \tag{۲۹.۳}$$

پس $S = \{a, D(a), D^2(a), \ldots\}$ یک زیر مجموعهٔ جابجائی A است. بوضوح $D(S) \subseteq S$ پس $D(C(S)) \subseteq C(S)$ و $D(C(C(S))) \subseteq C(C(S))$. چون S جابجائی است، $C(C(S))$ یک جبر باناخ جابجائی حاوی a است که تحت D پایاست. بنابر اثبات قضیهٔ قبل $D(a) \in Q(A)$. □

اگر فقط فرض کنیم $[a, D(a)] = 0$ آنگاه داریم

$$0 = D\left([a, D(a)]\right) = [D(a), D(a)] + [a, D^2(a)] = [a, D^2(a)]$$

امّا به‌ازای $n \geq 3$، $[a, D^n(a)] = 0$ لزوماً برقرار نیست.

قضیهٔ بعد قویترین حکمی است که دربارهٔ $[a, D^3(a)]$ می‌توان بیان کرد.

قضیه ۹.۳.۳ .

فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار و D یک اشتقاق روی A باشد به قسمیکه $Prim(A) = \mathcal{E}_A(D)$. اگر $a \in A$ به قسمیکه $[a, D(a)] = 0$ آنگاه $[a, D^3(a)]$ شبه پوچتوان است.

اثبات.

ر. ک. قضیهٔ ۳.۶ [۳۸]. □

حال با توجه به مطالب فوق به بررسی یک مسألهٔ باز می‌پردازیم.

فرض کنیدA یک جبر باناخ یکدار و D یک اشتقاق روی A باشد. همچنین $a \in A$ به قسمیکه $[a, D(a)] = ۰$ و $D(a)$ وارونپذیر باشد. آنگاه $C\left(C\left(\{a, D(a)\}\right)\right)$ زیرجبر باناخ جابجائی A است که حاوی زیرجبر باناخ جابجائی $C\left(C\left(\{a\}\right)\right)$ است و نگاشت

$$\begin{array}{rccc} d: & C\left(C\left(\{a\}\right)\right) & \longrightarrow & C\left(C\left(\{a, D(a)\}\right)\right) \\ & x & \longrightarrow & (D(a))^{-۱} D(x) \end{array}$$

یک اشتقاق است به قسمیکه $d(a) = ۱$.
حال این سئوال مطرح می‌شود.
فرض کنید A و B جبرهای باناخ جابجائی و یکدار باشند به قسمیکه A یک زیرجبر B حاوی ۱ باشد. آیا اشتقاق $D : A \to B$ و عضو $a \in A$ موجود است بطوریکه $D(a) = ۱$؟
حالتی که D کراندار باشد، جواب سئوال منفی است زیرا تحدید D به زیرجبر باناخ یکدار که بوسیله عضو a تولید می‌شود با قضیهٔ سینگر- ورمر متناقض است.
اگر D بیکران باشد اثبات توماس برای حدس سینگر- ورمر جواب نمی‌دهد. همچنین تکنیکهای استفاده شده در [۴۶] برای جواب دادن به سئوال فوق در حالت $A = B$ را نمیتوان به حالت کلی تعمیم داد. این مسأله فعلاً باز است.

۴.۳ برد اشتقاقهای کراندار طیفی

تعریف ۱.۴.۳ .

فرض کنید A و B جبرهای باناخ و $T : A \to B$ یک نگاشت خطی باشد.
اگر عدد ثابت $M > ۰$ موجود باشد به قسمیکه به‌ازای هر $a \in A$، $r(T(a)) \leq Mr(a)$ آنگاه T را کراندار طیفی گویند.
اگر $M = ۱$، آنگاه T را منقبض طیفی گویند.
اگر به‌ازای هر $a \in A$، $r(T(a)) = r(a)$ آنگاه T را طولپای طیفی گویند.
اگر به‌ازای هر $a \in A$، $r(T(a)) = ۰$ آنگاه T را بینهایت کوچک طیفی گویند.

قضیه ۲.۴.۳ . (پتاک ۱۹۷۹)
اگر D یک اشتقاق درونی و کراندار طیفی روی جبر باناخ یکدار A باشد آنگاه $D^۲(A) \subseteq Q(A)$.

اثبات.
ر. ک. [۳۵] قضیهٔ ۲.۱ . □
ماتیو و مورفی در سال ۱۹۹۱ قضیهٔ فوق را برای اشتقاقهای کراندار و نه لزوماً درونی ثابت کردند.

قضیه ۳.۴.۳ .
اگر D یک اشتقاق کراندار و کراندار طیفی روی جبر باناخ یکدار A باشد آنگاه $D^۲(A) \subseteq Q(A)$.

اثبات.
ر. ک. قضیهٔ ۳.۷ [۲۸]. □
برسار نشان داد با فرضهای قضیهٔ ۳.۴.۲ می‌توان نتیجه گرفت که برد $D^۲$ داخل رادیکال A قرار می‌گیرد. در ادامه اثبات برسار را می‌آوریم. قبل از اثبات به چند قضیه و تعریف نیاز داریم.

قضیه ۴.۴.۳ .
فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار و a عضو ثابتی از آن باشد. احکام زیر معادلند:
(الف) به‌ازای هر نمایش اکیداً تحویلناپذیر π روی A ، اسکالر λ_π موجود است به قسمیکه

$$\pi((a-\lambda_\pi)^۲)=۰$$

(ب) به‌ازای هر $x\in A$، $[[x,a],a]\in rad(A)$.
(ج) به‌ازای هر $x\in A$، $[[x,a],a]\in Q(A)$.

اثبات.
ر. ک. قضیهٔ ۳.۲ [۳۵]. □

تعریف ۵.۴.۳ .
فرض کنید T یک عملگر خطی کراندار روی فضای باناخ X باشد. $\lambda\in\mathbb{C}$ را یک مقدار ویژهٔ T گویند اگر $T-\lambda I$ یک به یک نباشد. طیف T مجموعهٔ تمام $\lambda\in\mathbb{C}$ هایی است که برد $T-\lambda I$ تمام X نباشد یا $T-\lambda I$ یک به یک نباشد.

قضیه ۶.۴.۳ . (قضیهٔ چگالی جیکوبسن)
فرض کنید π یک نمایش تحویلناپذیر پیوسته روی جبر باناخ X باشد. اگر $\xi_۱,\dots,\xi_n$ در X مستقل خطی باشند و $\eta_۱,\dots,\eta_n\in X$ آنگاه یک $a\in A$ موجود است به قسمیکه به‌ازای هر $i=۱,\dots,n$، $\pi(a)\xi_i=\eta_i$.

اثبات.
ر. ک. قضیهٔ ۴.۲.۵ [۲] □

قضیه ۷.۴.۳ . (برِسار ۱۹۹۳)[۵]
فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار و D یک اشتقاق درونی و کراندار طیفی روی A باشد. آنگاه $D(A)\subseteq rad(A)$.

اثبات.
فرض کنید φ یک خودریختی روی A باشد. آنگاه $\varphi D\varphi^{-۱}$ یک اشتقاق روی A است و داریم

$$\begin{aligned} r\left(\varphi D\varphi^{-۱}(x)\right) &= r\left(\varphi\left(D(\varphi^{-۱}(x))\right)\right)\\ &= r\left(D\left(\varphi^{-۱}(x)\right)\right)\\ &\le Mr\left(\varphi^{-۱}(x)\right)\\ &= Mr(x). \end{aligned} \qquad (۳۰.۳)$$

پس $\varphi D\varphi^{-۱}$ کراندار طیفی است. بالاخص $\varphi D\varphi^{-۱}$، $Q(A)$ را پایا نگه می‌دارد. بنابر قضیهٔ ۳.۴.۲ $D^۲(A)\subseteq Q(A)$. پس $\left(\varphi D\varphi^{-۱}D^۲\right)(A)\subseteq Q(A)$. فرض کنید π یک نمایش اکیداً تحویلناپذیر روی A باشد و $B=\pi(A)$. داریم $\pi(Q(A))\subseteq Q(B)$ پس

$$\pi\left(\left(\varphi D\varphi^{-۱}D^۲\right)(A)\right)\subseteq Q(B) \qquad (۳۱.۳)$$

بنابر فرض D درونی است پس عضو $a\in A$ موجود است به قسمیکه $D(x)=[a,x]$.

$y\in A$ را در نظر بگیرید و فرض کنید φ خود ریختی درونی $\varphi(x)=e^{y}xe^{-y}$ باشد. داریم

$$\begin{aligned}\left(\varphi D\varphi^{-1}D^{2}\right)(x) &= \varphi D\varphi^{-1}\left([a,[a,x]]\right)\\ &= \varphi D\left(e^{-y}[a,[a,x]]e^{y}\right)\\ &= \varphi\left([a,e^{-y}[a,[a,x]]e^{y}]\right)\\ &= e^{y}[a,e^{-y}[a,[a,x]]e^{y}]e^{-y}\\ &= e^{y}ae^{-y}[a,[a,x]]e^{y}e^{-y}-e^{y}e^{-y}[a,[a,x]]e^{y}ae^{-y}\\ &= e^{y}ae^{-y}[a,[a,x]]-[a,[a,x]]e^{y}ae^{-y}\\ &= [e^{y}ae^{-y},[a,[a,x]]]\end{aligned} \tag{۳۲.۳}$$

بنابر ۳۱.۳، به‌ازای هر $x,y\in A$،

$$\left[e^{\pi(y)}\pi(a)e^{-\pi(y)},[\pi(a),[\pi(a),\pi(x)]]\right]\in Q(B)$$

یعنی عضو $b=\pi(a)$ به‌ازای هر $z,w\in B$ در خاصیت زیر صدق می‌کند:

$$\left[e^{z}be^{-z},[b,[b,w]]\right]\in Q(B)$$

بنابر قضیهٔ ۳.۴.۴ اسکالر λ موجود است به قسمیکه $(b-\lambda)^{2}=0$. فرض کنید $c=b-\lambda$. آنگاه به‌ازای $z,w\in B$،

$$[e^{z}ce^{-z},[c,[c,w]]]\in Q(B)$$

حال چون $c^{2}=0$ پس به‌ازای هر $z,w\in B$،

$$cwce^{z}ce^{-z}-e^{z}ce^{-z}cwc\in Q(B)$$

نشان می‌دهیم $c=0$.

(فرض خلف) فرض کنید $c\neq 0$.

در اینصورت بردار ξ موجود است بطوریکه $\eta=c\xi\neq 0$. چون $c^{2}=0$ پس $c\eta=0$. بنابراین ξ و η مستقل خطی‌اند. بنابر قضیهٔ چگالی جیکوبسن عضو $z\in B$ موجود است به قسمیکه $z\xi=z\eta=\xi-\eta$. بنابر این $z^{2}\xi=z^{2}\eta=0$. پس $e^{z}\eta=\sum\frac{z^{n}}{n!}\eta=\eta+2\eta=\eta+\xi-\eta=\xi$ و بطریق مشابه $e^{z}\xi=2\xi-\eta$ و این ایجاب می‌کند که $e^{-z}\xi=\eta$ و $e^{-z}\eta=2\eta-\xi$. بنابر این

$$\left(ce^{z}ce^{z}ce^{-z}-e^{z}ce^{-z}ce^{z}c\right)\xi=\xi$$

پس ۱ یک مقدار ویژهٔ آن است.

امّا قبلاً نشان دادیم که $ce^{z}ce^{z}ce^{-z}-e^{z}ce^{-z}ce^{z}c$ شبه پوچتوان است. و این تناقض است. پس $c=0$. بنابراین $\pi(a)=b=\lambda$ پس به‌ازای هر $x\in A$، $\pi([a,x])=0$. چون π یک نمایش اکیداً تحویلناپذیر دلخواه است پس $D(x)=[a,x]\in rad(A)$ و حکم ثابت می‌شود. □

حال طبیعتاً این سئوال مطرح می‌شود که آیا قضیهٔ فوق برای یک اشتقاق دلخواه برقرار است؟ به نظر می‌رسد که اثبات این حدس چندان ساده نیست.

حال با توجه به قضیهٔ فوق نتیجهٔ زیر را داریم.

نتیجه ۸.۴.۳ .

فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار و $a\in A$. احکام زیر معادلند:

(الف) *به‌ازای هر* $x\in A$، $ax-xa\in rad(A)$.

(ب) *به‌ازای هر* $x\in A$، $ax-xa\in Q(A)$.

(ج) *به‌ازای هر* $x\in A$ *و برخی* $M>0$، $r(ax-xa)\leq Mr(x)$.

(د) *به‌ازای هر* $x\in A$ *و برخی* $M>0$، $r(ax)\leq Mr(x)$.

اثبات.
با توجه به قضیهٔ ۳.۴.۲ و قضیهٔ ۳.۴.۷ بدیهی است. □

۵.۳ برد اشتقاقها روی برخی جبرهای باناخ خاص

در این بخش نشان می‌دهیم حدس سینگر- ورمر روی برخی جبرهای خاص برقرار است.
ابتدا حاصلضرب دو جبر باناخ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم. این تعریف به گونه ای است که اولاً با حاصلضرب فضاهای برداری سازگار است و ثانیاً حاصل یک جبر باناخ است.
فرض کنید $(A.\|.\|_1)$ و $(B,\|.\|_2)$ دو جبر باناخ باشند با این خاصیت که

$$\forall x,y,z\in A,B \qquad [x,[y,z]]=0.$$

فرض کنید $A\oplus B$ حاصلضرب مستقیم فضاهای برداری A و B باشد. عمل ضرب روی $A\oplus B$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.
به‌ازای هر $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in A\oplus B$

$$(a_1,b_1)(a_2,b_2)=(a_1a_2+a_2a_1,b_1b_2+b_2b_1)$$

با توجه به شرط $[x,[y,z]]=0$، $A\oplus B$ با ضرب فوق یک جبر است. این شرط برای اثبات شرکت پذیری عمل ضرب لازم است. همچنین نرم روی $A\oplus B$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|||(a,b)|||=2(\|a\|_1+\|b\|_2)$$

در اینصورت $A\oplus B$ با این نرم یک جبر باناخ جابجائی است. زیرا

$$\begin{aligned}(a_1,b_1)(a_2,b_2)&=(a_1a_2+a_2a_1,b_1b_2+b_2b_1)\\&=(a_2a_1+a_1a_2,b_2b_1+b_1b_2)\\&=(a_2,b_1)(a_1,b_1)\end{aligned}$$

پس جابجائی است.
حال نشان می‌دهیم $|||.|||$ یک نرم جبری است.

$$\begin{aligned}|||(a_1,b_1)(a_2,b_2)|||&=|||(a_1a_2+a_2a_1,b_1b_2+b_2b_1)|||\\&=2(\|a_1a_2+a_2a_1\|_1+\|b_1b_2+b_2b_1\|_2)\\&\le 4(\|a_1\|_1\|a_2\|_1+\|b_1\|_2\|b_2\|_2)\\&\le 4(\|a_1\|_1+\|b_1\|_2)(\|a_2\|_1+\|b_2\|_2)\\&=|||(a_1,b_1)|||.|||(a_2,b_2)|||\end{aligned}$$

بعلاوه نرم فوق کامل است زیرا اگر $\{(a_n,b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنبالهٔ کوشی باشد آنگاه

$$\forall\epsilon>0,\quad \exists N\quad \forall m,n\ge N\qquad |||(a_n,b_n)-(a_m,b_m)|||<2\epsilon$$

$$\begin{aligned} ۲\epsilon &> |||(a_n - a_m, b_n - b_m)||| \\ &= ۲(\|(a_n - a_m)\|_۱ + \|(b_n - b_m)\|_۲) \end{aligned}$$

در نتیجه $\|a_n - a_m\| < \epsilon$ و $\|b_n - b_m\| < \epsilon$. پس $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ کوشی در A و $\{b_n\}$ یک دنبالهٔ کوشی در B است پس $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرا هستند. فرض کنید $a_n \to a$ و $b_n \to b$. نشان می‌دهیم $(a_n, b_n) \to (a, b)$.

فرض کنید $\epsilon > ۰$.داریم

$$\exists n_۱ \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq n_۱ \qquad \|a_n - a\| < \epsilon/۴$$

و

$$\exists n_۲ \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq n_۲ \qquad \|b_n - b\| < \epsilon/۴$$

حال اگر N را ماکزیمم $n_۱, n_۲$ در نظر بگیریم آنگاه

$$\forall n \geq N \qquad |||(a_n - b_n) - (a, b)||| = ۲(\|a_n - a\|_۱ + \|b_n - b\|_۲) \leq \epsilon$$

در نتیجه دنباله همگراست. پس نشان دادیم $A \oplus B$ یک جبر باناخ جابجائی است.

قضیه ۱.۵.۳ . (کیم، جان ۱۹۹۱)[۲۲]

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد که به‌ازای هر x, y, z در A در شرط $[x, [y, z]] = ۰$ صدق کند و D یک اشتقاق روی A باشد. آنگاه $D(A) \subseteq Q(A)$.

اثبات.

بنابر مطالب فوق $A \oplus A$ یک جبر باناخ جابجائی است. $\overline{D}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \overline{D}: \quad A \oplus A \to & \quad A \oplus A \\ (a, b) \to & \quad (D(a), D(b)) \end{aligned}$$

$\overline{D}$ یک اشتقاق روی $A \oplus A$ است. زیرا

$$\begin{aligned} \overline{D}\left((a_۱, b_۱)(a_۲, b_۲)\right) &= \overline{D}\left(a_۱a_۲ + a_۲a_۱, b_۱b_۲ + b_۲b_۱\right) \\ &= (D(a_۱a_۲ + a_۲a_۱), D(b_۱b_۲ + b_۲b_۱)) \\ &= (D(a_۱)a_۲ + a_۱D(a_۲) + D(a_۲)a_۱ + a_۲D(a_۱), D(b_۱)b_۲ \\ &\qquad + b_۱D(b_۲) + D(b_۲)b_۱ + b_۲D(b_۱)) \\ &= (D(a_۱)a_۲ + a_۲D(a_۱), D(b_۱)b_۲ + b_۲D(b_۱)) \\ &\qquad + (a_۱D(a_۲) + D(a_۲)a_۱, b_۱D(b_۲) + D(b_۲)b_۱) \\ &= (D(a_۱), D(b_۱))(a_۲, b_۲) + (a_۱, b_۱)(D(a_۲), D(b_۲)) \\ &= \overline{D}(a_۱, b_۱)(a_۲, b_۲) + (a_۱, b_۱)\overline{D}(a_۲, b_۲). \end{aligned}$$

بنابر قضیهٔ ۲.۳.۲ ،

$$\overline{D}(A \oplus A) \subseteq rad(A \oplus A).$$

حال داریم

$$\begin{aligned} r(a, b) &= \lim_{n \mapsto \infty} |||(a, b)^n|||^{\frac{۱}{n}} \\ &= \lim_{n \mapsto \infty} \left(۲^{n-۱}|||(a^n, b^n)|||\right)^{\frac{۱}{n}} \\ &= \lim_{n \mapsto \infty} \left(۲^n(\|a^n\| + \|b^n\|)\right)^{\frac{۱}{n}} \\ &\leq ۲(r(a) + r(b)). \end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} r(a,b) &= ۲\lim_{n\mapsto\infty}(\|a^n\|+\|b^n\|)^{\frac{۱}{n}} \\ &\geq ۲\lim_{n\mapsto\infty}\|a^n\|^{\frac{۱}{n}} \\ &= ۲r(a). \end{aligned}$$

بطریق مشابه $r(a,b)\geq ۲r(b)$. بنابر این

$$r(a)+r(b)\leq r(a,b)\leq ۲(r(a)+r(b)) \qquad , \qquad (a,b)\in A\oplus A$$

بنابر این

$$r(a,b)=\circ \Longleftrightarrow r(a)=\circ, r(b)=\circ$$

پس

$$\begin{aligned} rad(A\oplus A) &= Q(A\oplus A)=\{(a,b)\in A\oplus A|\ r(a,b)=\circ\} \\ &= \{(a,b)\in A\oplus A|\ r(a)=\circ, r(b)=\circ\} \\ &= Q(A)\oplus Q(A). \end{aligned}$$

بنابر این

$$D(A)\oplus D(A)=\overline{D}(A\oplus A)\subseteq rad(A\oplus A)=Q(A)\oplus Q(A)$$

پس $D(A)\subseteq Q(A)$ و حکم اثبات می‌شود. $\square$

یک مثال از یک جبر باناخ غیر جابجائی و غیر نیمساده ارائه می‌کنیم که در شرط $[x,[y,z]]=\circ$ صدق می‌کند.

مثال ۲.۵.۳ .
فرض کنید

$$A=\left\{\begin{bmatrix} d & \circ & \circ \\ a & d & \circ \\ b & c & d \end{bmatrix} |a,b,c,d\in\mathbb{C}\right\}$$

A با جمع و ضرب ماتریسی و ضرب اسکالر یک جبر غیرجابجائی است. بوضوح A در شرط $[x,[y,z]]=\circ$ صدق می‌کند. نرم روی A را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\|X\|=۳\max\{|a|,|b|,|c|,|d|\} \qquad , \qquad X=\begin{bmatrix} d & \circ & \circ \\ a & d & \circ \\ b & c & d \end{bmatrix}$$

با این نرم A به یک جبر باناخ تبدیل می‌شود. براحتی میتوان نشان داد که $r(X)=|d|$. بنابر این

$$\begin{aligned} Q(A) &= \{X\in A|\ r(X)=\circ\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ a & \circ & \circ \\ b & c & \circ \end{bmatrix} |a,b,c\in\mathbb{C}\right\} \end{aligned}$$

توجه کنید که مجموعهٔ $\left\{\begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ a & \circ & \circ \\ b & c & \circ \end{bmatrix} |a,b,c\in\mathbb{C}\right\}$ تنها ایدآل ماکسیمال A است و بنابر این رادیکال A است. بنابر این $rad(A)=Q(A)$. در جبرهای باناخ جابجائی $rad(A)=Q(A)$، امّا در حالت غیر جابجائی تساوی برقرار نیست امّا همواره داریم $rad(A)\subseteq Q(A)$.

قضیه ۳.۵.۳. [۲۱]
فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار و D یک اشتقاق روی A باشد. فرض کنید $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ و $u, v \in A$ موجود باشند به قسمیکه به‌ازای هر $x, y, z \in A$،
۱) $u - v = \lambda 1$
۲) $x(u+v)y - y(u+v)x = 0$
۳) $[xu, zv]y - y[vx, uz] = 0$
آنگاه $D(A) \subseteq rad(A)$.

اثبات.
ر. ک. [۲۱] قضیهٔ ۳.۲. □

کریدون در سال ۱۹۹۵ [۱۱] نشان داد که حدس سینگر-ورمر غیر جابجائی روی کلاس خاصی از جبرها بنام جبر پوچساز مدولی برقرار است.
در ادامه این جبرها را معرفی کرده و اثبات کریدون را بیان می‌کنیم.

تعریف ۴.۵.۳.
فرض کنید A یک جبر باشد. عضو خودتوان $e \in A$ را خودتوان مینیمال گوییم اگر eAe یک جبر تقسیمی باشد.

تعریف ۵.۵.۳.
فرض کنید A یک جبر باشد. پوچسازِ چپِ زیر مجموعهٔ E از A عبارتست از

$$_{LA}E = \{a \in A | aE = \{0\}\}.$$

بطریق مشابه پوچساز راست E عبارتست از

$$_{RA}E = \{a \in A | Ea = \{0\}\}.$$

قضیه ۶.۵.۳.
فرض کنید A یک جبر نیمه اول (یعنی $nil(A) = 0$) و e یک عضو خودتوان مینیمال A باشد. آنگاه $A(a-e)$ یک ایدآل چپ مدولی ماکسیمال است. بعلاوه مجموعهٔ

$$P^e =_{LA}(Ae) = A(1-e) : A = \{a \in A | aA \subseteq A(1-e)\}$$

یک ایدآل اولیه است که حاوی هیچ ایدآل اولیهٔ دیگری از A نمی باشد. هر ایدآل اول که حاوی e نباشد، حاوی P^e است.

اثبات.
ر. ک. [۳۳] قضیهٔ ۸.۴.۴. □

قضیه ۷.۵.۳.
در جبر نیمه اول A احکام زیر معادلند:
(الف) به‌ازای هر ایدآل چپ مدولی ماکسیمال M داریم $_{RA}M \neq \{0\}$.
(ب) به‌ازای هر ایدآل راست مدولی ماکسیمال M داریم $_{LA}M \neq \{0\}$.
(ج) هر ایدآل اولیهٔ A به‌ازای یک عضو خودتوان مینیمال $e \in A$ به شکل P^e است.

اثبات.
ر. ک. [۳۳] قضیهٔ ۸.۴.۵. □

تعریف ۸.۵.۳ .
جبر نیمه اول A را که در یکی از شرایط معادل قضیهٔ فوق صدق کند را جبر پوچساز مدولی مینامیم.

قضیه ۹.۵.۳ . (کریدون، ۱۹۹۵)[۱۱]
فرض کنید D یک اشتقاق روی جبرپوچساز مدولیِ A باشد. آنگاه هر ایدآل اولیهٔ A تحت D پایاست.

اثبات.
بنابر فرض هر ایدآل اولیه A به شکل $P^e =_{LA} (Ae) = \{a \in A | aA \subseteq A(۱ - e)\}$ می باشد که e یک عضو خودتوان مینیمال A است. بنابر قضیهٔ ۳.۵.۶ هر ایدآل اول که حاوی e نباشد، حاوی P^e می باشد. بنابر لم ۳.۲.۱ یک ایدآل اول مینیمال $P \supseteq P^e$ وجود دارد به قسمیکه $D(P) \subseteq P$. پس یا $e \in P$ یا $P \supseteq P^e$. در حالت دوم داریم $P = P^e$ و چون $D(P) \subseteq P$ پس حکم برقرار است.
حال فرض کنید $e \in P$. داریم $D(e) \in P \subseteq P^e$. نشان می‌دهیم P^e تحت D پایاست.
فرض کنید a عضو دلخواهی از P^e و x عضو دلخواهی از A باشد. داریم

$$a \in P^e \Rightarrow aA \subseteq A(۱ - e) \Rightarrow ax \in A(۱ - e)$$

بنابراین $a_۱ \in A$ موجوداست به قسمیکه $ax = a_۱(۱ - e)$.
از طرفی $a_۱D(e) = a_۱D(e^۲) = a_۱eD(e) + a_۱D(e)e = (a_۱e)D(e) + (a_۱D(e))e$ چون P^e یک ایدآل اولیه است و $e \in P^e$ پس $a_۱e \in P^e$ و چون $D(e) \in P \subseteq P^e$ پس $a_۱D(e) \in P^e$. بنابراین

$$\begin{aligned} D(ax) &= D(a_۱(۱ - e)) \\ &= D(a_۱)(۱ - e) + a_۱D(۱ - e) \\ &= D(a_۱)(۱ - e) - a_۱D(e) \in A(۱ - e). \end{aligned}$$

بنابراین به‌ازای هر $x \in A$،

$$D(a)x = D(ax) - aD(x) \in A(۱ - e).$$

پس $D(a) \in P^e$. چون a عضو دلخواهی از P^e بود پس $D(P^e) \subseteq P^e$ و حکم برقرار است. □

فصل ۴

خلاصه و نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه، قضیه و حدس سینگر-ورمر برای جبرهای باناخ جابجائی و جبرهای باناخ غیرجابجائی بررسی شد. طبق بررسیهای انجام شده نتیجه جدیدتری در مورد حدس سینگر-ورمر غیرجابجائی ارائه نشده است.

شرطهای زیر ایجاب می‌کند که برد اشتقاق پیوستهٔ D روی جبر باناخ A داخل $\mathsf{rad}(A)$ قرار می‌گیرد:

۱) به‌ازای هر $a \in A$، $[D, \delta_a](A) \subseteq \mathsf{rad}(A)$(یود).

۲) $D(A) \subseteq \{x \in A : [x, y] \in \mathsf{rad}(A) \quad \forall y \in A\}$(یود).

۳) $D(A) \subseteq Q(A)$(ماتیو-مورفی).

۴) به‌ازای یک $\alpha \in \mathbb{C}$، $\alpha D^3 + D^2$ اشتقاق باشد.

۵) به‌ازای هر $x \in A$، $[Dx, x] \in \mathsf{rad}(A)$(ماتیو-مورفی).

۶) به‌ازای هر $x \in A$، $(D(x))^2 \in \mathsf{rad}(A)$.

۷) به‌ازای هر $x \in A$، $[Dx, x]^2 \in \mathsf{rad}(A)$(برسار-ووکمن).

۸) به‌ازای هر $x \in A$، $[[[Dx, x], x], x] \in \mathsf{rad}(A)$.

۹) به‌ازای هر $x \in A$، $[Dx, x] \in Q(A)$.

۱۰) D مرکزساز باشد.

در حالتی که D کراندار نیست هر کدام از شرایط زیر ایجاب می‌کند که برد D داخل $\mathsf{rad}(A)$ قرار می‌گیرد:

۱) D مرکزساز باشد.

۲) $D(A) \subseteq Q(A)$(توروفسکی- شولمن).

۳) به‌ازای هر $x \in A$، $[Dx, x]Dx \in \mathsf{rad}(A)$.

۴) $\sup\{r(z^{-1}Dz) : z \in G(A)\} < \infty$(شرط لازم و کافی).

۵) به‌ازای هر $x, y \in A$، $[Dx, Dy] \in Z(A)$(کریدون).

۶) به‌ازای هر $x \in A$، $[x, Dx] \in \mathsf{rad}(A)$(ماتیو).

۷) $D(A) \subseteq Z(A)$.

۸) D^2 یک اشتقاق ژوردان باشد.

همچنین اگر D یک اشتقاق درونی و کراندار طیفی روی جبر باناخ A باشد آنگاه $D(A) \subseteq \mathsf{rad}(A)$.

نتایج موضعی بدست آمده تاکنون برای اشتقاقهای پیوسته عبارتند از:

۱) اگر $D^2(a) = 0$ آنگاه Da شبه پوچتوان است.

۲) اگر به‌ازای هر $y \in A$، $[Dx, Dy] \in \mathsf{rad}(A)$ آنگاه $Dx \in \mathsf{rad}(A)$.
۳) اگر $[Da, a] = 0$ آنگاه Da شبه پوچتوان است.
برای اشتقاقهای کلی داریم :
۱) اگر $Da \in Z(A)$ آنگاه $Da \in \mathsf{rad}(A)$.
۲) اگر $D^2(a) = 0$ آنگاه Da شبه پوچتوان است(توماس).
۳) اگر $Da \in C(C(\{a\}))$ آنگاه Da شبه پوچتوان است.
۴) اگر $[a, Da] = 0$ آنگاه $\sigma(Da)$ متناهی است.
۵) اگر به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $[a, D^n(a)] = 0$ آنگاه Da شبه پوچتوان است.
امّا در مورد جبرهایی که حدس سینگر- ورمر روی آنها برقرار است نتایج زیادی بدست نیامده است. نتایج بدست آمده تاکنون عبارتند از:
۱) اگر به‌ازای هر $x, y, z \in A$، $[x, [y, z]] = 0$ آنگاه $D(A) \subseteq Q(A)$(کیم- جان).
۲) اگر $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ و $u, v \in A$ موجود باشند به قسمیکه به‌ازای هر $x, y, z \in A$،
الف) $u - v = \lambda 1$
ب) $x(u+v)y - y(u+v)x = 0$
ج) $[xu, zv]y - y[vx, uz] = 0$
آنگاه $D(A) \subseteq \mathsf{rad}(A)$(کیم).
۳) اگر A یک جبر پوچساز مدولی باشد آنگاه هر ایدآل اولیهٔ A تحت D پایاست(کریدون).
حال رابطهٔ حدس سینگر- ورمر غیر جابجائی را با سایر مسائل باز در آنالیز تابعی بررسی می‌کنیم. در سال ۱۹۹۴ ماتیو[۲۵] جمعبندی از آخرین نتایج تا آن زمان را ارائه کرده است. در ادامه حکم زیر را حدس سینگر- ورمر غیر جابجائی می‌نامیم.
(ح۱) هر اشتقاق روی یک جبر باناخ که به پیمانهٔ رادیکال جابجاگر باشد، به پیمانهٔ رادیکال درونی است.
حکم فوق با اینکه از قضیهٔ ۱۴.۱.۳ شرط پیوستگی را حذف کنیم(اگر به‌ازای هر $a \in A$، $[a, D(a)] \in \mathsf{rad}(A)$ آنگاه $D(A) \subseteq \mathsf{rad}(A)$) معادل است زیرا
اگر D با اشتقاق درونی δ_a به پیمانهٔ رادیکال مساوی باشد آنگاه $D - \delta_a$، A را به توی $\mathsf{rad}(A)$ می‌نگارد. در نتیجه چون $D = D - \delta_a + \delta_a$ پس $\mathsf{rad}(A)$ تحت D پایاست. بنا بر قضیه ای از جانسون و سینکلر[۱۸] اشتقاق القا شده توسط D روی جبر باناخ نیمسادهٔ $A/\mathsf{rad}(A)$ کراندار است. پس بنابر قضیهٔ ۲.۳.۲ صفر است. بنابراین $D(A) \subseteq \mathsf{rad}(A)$.
تاکنون حدس (ح۱) ثابت نشده است. این حدس با برخی مسائل باز دیگر مرتبط است.

قضیه ۱.۱.۴ .
احکام زیر معادلند:

الف) به‌ازای هر جبر باناخ A و هر اشتقاق D روی A ، $\mathcal{E}_A(D) = \emptyset$.(حدس سینگر- ورمر غیر جابجائی)
ب) به‌ازای هر جبر باناخ رادیکال $\mathcal{R}$ و هر اشتقاق D روی $\mathcal{R}^\#$ داریم $D(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$.
ج) به‌ازای هر جبر باناخ رادیکال اول $\mathcal{R}$ و هر اشتقاق D روی $\mathcal{R}^\#$ داریم $D(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$.
د) هر اشتقاق روی یک جبر باناخ دارای فضای جداساز پوچتوان است.
ه) هر اشتقاق روی یک جبر باناخ نیمه اول[۱]، پیوسته است.

---
[۱] semiprime

و) هر اشتقاق روی یک جبر باناخ اول، پیوسته است.

اثبات.
هم ارزی شرطهای «الف» و «ب» نتیجهٔ منتشر نشدهٔ توماس است. اثبات هم ارزی «ب» و «ج» مشابه اثبات برای حالت جابجائی است(ر. ک. [۴۰]). برای اثبات هم ارزی «الف» و «د» و «ه» و «و» به [۱۳] رجوع کنید. □

میدانیم که حدس سینگر-ورمر غیر جابجائی با اینکه هر اشتقاق روی یک جبر باناخ، رادیکال را پایا نگه می‌دارد معادل است. قضیهٔ زیر شرایطی را بیان می‌کند که ایجاب می‌کند یک اشتقاق روی یک جبر باناخ، رادیکال را پایا نگه میدارد.

قضیه ۲.۱.۴ . (*کریدون* ۱۹۹۵)[۱۱]
فرض کنید D یک اشتقاق روی جبر باناخ A باشد. احکام زیر معادلند:
(*الف*) $D(\mathrm{rad}(A)) \subseteq \mathrm{rad}(A)$.
(ب) $D(\mathrm{rad}(A)) \subseteq Q(A)$.
(ج) *به‌ازای یک عدد صحیح* $m \geq ۱$، $D^n(\mathrm{rad}(A)) \subseteq Q(A)$.
(د) *به‌ازای هر* $n \geq ۱$، $\mathcal{S}(D^n) \subseteq \mathrm{rad}(A)$.
(ه) *اگر A یکدار باشد، به‌ازای هر عضو وارونپذیر a در $\mathrm{rad}(A)$، $D(a)+۱$ وارونپذیر است.*
همچنین شرایط زیر ایجاب می‌کند که حکم الف برقرار است.
(و) $D(Q(A)) \subseteq Q(A)$.
(ز) *به‌ازای یک عدد صحیح* $n \geq ۱$، $D^n(\mathrm{rad}(A)) \subseteq Z(A)$.

اثبات.
ر. ک. قضیهٔ ۴.۸ [۱۱]. □

تعریف ۳.۱.۴ .
فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. اگر تنها ایدآلهای دوطرفهٔ بستهٔ A ، $\{0\}$ و A باشد آنگاه A را سادهٔ توپولوژیکی می‌نامند.

چون ایدالهای اولیه در جبرهای باناخ بسته اند پس یک جبر باناخ سادهٔ توپولوژیکی جبر رادیکال یا جبر اولیه است.حال، اینکه یک جبر باناخ رادیکال سادهٔ توپولوژیکی موجود است یا خیر به عنوان یک مسألهٔ باز مطرح است.

کیوساک[۲] نشان داد [۱۳] که اگر یکی از احکام زیر نادرست باشد آنگاه یک جبر باناخ رادیکال سادهٔ توپولوژیکی موجود است.
(۱) هر اشتقاق روی یک جبر باناخ هر ایدآل اولیه را پایا نگه میدارد.
(۲) هر اشتقاق روی یک جبر باناخ دارای فضای جداساز پوچتوان است.
(۳) هر اشتقاق روی یک جبر باناخ نیمه اول پیوسته است.
به این سه حکم حکم زیر را اضافه می‌کنیم.
(۴) هر اشتقاق روی یک جبر باناخ اول پیوسته است.

بنابر قضیهٔ ۴.۱.۱ احکام (۲) و (۳) و (۴) معادلند. کیوساک نشان داد که اگر (۴) برقرار باشد آنگاه حدس (ح۱) برقرار است. بنابر قضیهٔ ۴.۵ [۱۳] حکم (۲) حکم (۱) را نتیجه میدهد. حال همانطور که قبلاً اشاره شد حکم زیر با حکم (۱) معادل است.

[۲] Cusack

(۵) هر اشتقاق روی یکدار شدهٔ یک جبر باناخ رادیکال، رادیکال را پایا نگه میدارد.

اگر (ح۱) برقرار باشد (۱) نیز برقرار است زیرا به‌ازای هر اشتقاق D روی یکدارشدهٔ جبر باناخ رادیکال A و هر $a \in A_\circ = \text{rad}(A)$،

$$[a+\lambda 1, D(a+\lambda 1)] = [a, D(a)] \in \text{rad}(A)$$

پس بنابر (ح۱) $D(A) \subseteq \text{rad}(A)$. در نتیجه آنچه در اینجا بنام حدس سینگر- ورمر غیرجابجائی مطرح کردیم با آنچه در [۴۱] و [۴۷] بنام حدس سینگر- ورمر غیر جابجائی نامیده شده است، معادل است.

همانطور که در فصل ۱ آمد سینکلر حکم (۱) را برای اشتقاقهای کراندار ثابت کرد. پس حدس (ح۱) برای تمام اشتقاقهای روی جبر باناخ نیمساده برقرار است.

نشان دادیم که ایدآلهای اوّل مینیمال تحت اشتقاقهای روی جبرهای باناخ پایا هستند که با توجه به قضایای پیوستگی خودکار و قضایای پوسنر و توماس حکم را به جبرهای باناخ اوّل تقلیل دهیم.

حال شرط قویتری روی (ح۱) قرار می‌دهیم. فرض کنید D به پیمانهٔ پوچ- رادیکال A جابجاگر باشد.

ماتیو[۲۷] و رونده[۳۹] مستقلاً نشان دادند که با قرار دادن این شرط حدس (ح۱) برقرار است. به نظر می‌رسد این قویترین نتیجه در مورد صحت حدس (ح ۱) است.

همانطور که قبلاً بیان شد حدس سینگر- ورمر را با استفاده از قضیهٔ کلینک- شیرکوف نیز تعمیم داده‌اند.

ماتیو و مورفی نشان دادند که قضیهٔ کلینک- شیرکوف یا به عبارتی سئوال (ب) ابتدای فصل سوم برای اشتقاقهای کراندار برقرار است. امّا برقراری حکم برای اشتقاقهای بیکران به عنوان یک مسالهٔ باز به نام قضیهٔ کلینک- شیرکوف بیکران مطرح است[۲۶].

(ح۲)

فرض کنید D یک اشتقاق روی جبر باناخ A باشد. آیا اگر $a \in A$ و $[a, D(a)] = 0$ آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که $D(a)$ شبه پوچتوان است؟

این حدس اولین بار توسط ماتیو[۲۶] بیان شد.

اگر (ح۱) برقرار باشد آنگاه (ح۲) نیز صحیح است زیرا

اگر به‌ازای هر ایدآل اولیهٔ P، $D(P) \subseteq P$ آنگاه شرط $[a, D(a)] = 0$ ایجاب می‌کند که $[a + P, D_P(a+P)] = 0$ و اینکه D_P کراندار است. بنابراین $D_P(a+P)$ شبه پوچتوان است. حال داریم

$$\sigma_A(Da) = \cup_{P \in Prim(A)} \sigma_{A/P}(Da+P) = \{0\}$$

پس $D(a)$ شبه پوچتوان است.

امّا از (ح۲) چه می‌دانیم؟

بنابر قضیهٔ ۱۷.۲.۳ تعداد ایدآلهای اولیهٔ استثنائی متناهی و هر کدام از همبعدی متناهی اند.

پس همانطور که قبلاً اشاره شد به‌ازای هر $a \in A$ که $[a, D(a)] = 0$، $\sigma_A(D(a))$ متناهی است.

رونده نشان داد که اگر (ح۲) نادرست باشد آنگاه یک عضو شبه پوچتوان a موجود است به قسمیکه $[a, D(a)] = 0$ و $D(a)$ وارونپذیر است. او همچنین نشان داد که (ح۲) با یک سری شرطهای قویتر برقرار است.

کتاب‌نامه

[1] G. R. Allan, “Embedding the algebra of formal power series in a Banach algebra”,*Proc. London Math. Soc.(3)*, **25**(1972) ,329–340.

[2] B. Aupetit, A Primer on Spectral Theory , Springer-Verlag, New-York, 1991.

[3] W. Bade and P. Curtis, “Homomorphisms of commutative Banach algebras”, *Amer. J. Math.,* **82**(1960), 589–608.

[4] F. F. Bonsall and J. Duncan, Complete Normed Algebras, Ergeb. Math. Grenzgeb. 80, Springer, 1973.

[5] M. Brešar, “Derivations decreasing the spectral radius” , *Arch. Math.(Basel),* **61**(1993), 160–162.

[6] M. Brešar, “Derivations on noncommutative Banach algebras, II” , *Arch. Math.(Basel),* **63**(1994), 56–59.

[7] M. Brešar and M. Mathieu, “Derivations mapping into the radical, III” , *J. Funct. Analysis,* **133**(1995), 21–29.

[8] M. Brešar and J. Vukman, “Derivations on noncommutative Banach algebras” , *Arch. Math.(Basel),* **59**(1992), 363–370.

[9] J. C. Chang, “On semiderivations of prime rings”, *Chinese J. Math.,* **12**(1984), 255–262.

[10] J. B. Conway, A Course in Functional Analysis , Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[11] T. Creedon, “Derivations that map into the radical”, *Ph.D. Thesis,* University College Cork (1995).

[12] T. Creedon, “Product of derivations”, *to appear in Proc. Edinburgh Math. Soc.*

[13] J. Cusack, “Automatic continuity and topologically simple radical Banach algebras”, *J. London Math. Soc.,* **16**(1977), 493–500.

[14] H. J. Dales, “Automatic continuity: A survey ”, *Bull. London Math. Soc.,* **10**(1978), 129–183.

[15] J. Dixmier, Algébres envellopantes , Cahier Sci., **27** , GauthierVillars, Paris, 1974.

[16] I. N. Herstein, "Jordan derivations of prime rings", *Proc. Amer. Math. Soc.,* **8**(1957), 1104–1110.

[17] B. E. Johnson, "Continuity of derivations on commutative algebras ", *Amer. J. Math.,* **91**(1969), 1–10.

[18] B. E. Johnson and A. M. Sinclair, "Continuity of derivations and a problem of Kaplansky", *Amer. J. Math.,* **90**(1968), 1067–1073.

[19] B. E. Johnson and A. M. Sinclair, "Continuity of linear operators commuting with continuous linear operators, II", *Trans. Amer. Math. Soc.,* **146**(1969), 533–540.

[20] A. Khosravi, "Derivations on commutative Banach algebras", *Proc. Amer. Math. Soc.,* **84**(1982), 60–64.

[21] B. D. Kim, "The image of derivations on certain Banach algebras", *Comm. Korean Math. Soc.,* **13**(1998), No. 3, 489–499.

[22] B. D. Kim and K. W. Jun, "The range of derivations on non-commutative Banach algebras", *Bull. Korean Math. Soc.,* **28**(1991), 65–68.

[23] D. C. Kleinecke, "On operator commutators", *Proc. Amer. Math. Soc.,* **8**(1957), 535–536.

[24] M. Mathieu, "Posner's second theorem deduced from the first " , *Proc. Amer. Math. Soc.,* **114**(1992), 601–602.

[25] M. Mathieu, "Where to find the image of a derivation" , *Banach Center Publ.,* **30**(1994), 237–249.

[26] M. Mathieu, "Is there an unbounded Kleinecke-Shirokov theorem?" , *Sem. ber. Funkt. ana.,* **18** Tübingen(1990), 137–143.

[27] M. Mathieu, "On the range of centrlizing derivatons" , *Contemp. Math.* **184**(1995), 291–297.

[28] M. Mathieu and G. J. Murphy, "Derivations mapping into the radical " , *Arch. Math.(Basel),* **57**(1991), 469–474.

[29] M. Mathieu and V. Runde, "Derivations mapping into the radical II" , *Bull. London Math. Soc.,* **24**(1992), 485–487.

[30] N. H. McCoy, "Prime ideals in general rings", *Amer. J. Math.,* **71**(1949), 823–833.

[31] G.. J. Murphy, "Aspects of the theory of derivations", *Banach Center Publ.,* **30**(1994), 267–275.

[32] E. C. Posner, "Derivations in prime rings " , *Proc. Amer. Math. Soc.,* **8**(1957), 1093–1100.

[33] T. W. Palmer, Banach algebras and the general theory of $*$-algebras , *Encyclopedia of Math.,* Cambridge Univ. Press, Cambridge (1994).

[34] V. Pták, "Derivations, Commutators and the radical ", *Manuscripta Math.*, **23**(1978), 355–362.

[35] V. Pták, "Commutators in Banach Algebras" , *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **22**(1979), 207–211.

[36] C. E. Rickart, The general theory of Banach algebras , Krieger Publishing Co. Inc., 1974.

[37] W. Rudin, Functional analysis , Mc-Graw-Hill, New York, 1973.

[38] V. Runde, "Range inclusion results for derivations on noncommutative Banach algebras", *Studia Math.*, **105**(1993), 159–172.

[39] V. Runde, "Problems in automatic continuity" , *Ph. D. Thesis* , Univ. California, Berkeley 1993.

[40] V. Runde, "Automatic continuity of derivations and epimorphisms", *Pacific J. Math.*, **147**(1991), 365–374.

[41] V. Runde, "Derivationen auf kommutativen Banachalgebren" ,*Schriftenreihe des Mathematischen Institute der Universitat Munster (3)* ,**1**(1990).

[42] F. V. Shirokov, "Proof of a conjecture of Kaplansky", *Uspekhi Mat. Nauk.*, **11**(1956), 167–168.

[43] A. M. Sinclair, "Continuous Derivations on Banach algebras", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **20**(1969), 166–170.

[44] A. M. Sinclair, Automatic Continuity of Linear Operators, *London Math. Soc. Lecture Note Ser. 21(Cambridge University Press), London*, 1976.

[45] I. M. Singer and J. Wermer, " Derivations on commutative normed algebras", *Math. Ann.*, **129**(1955), 260–264.

[46] M. P. Thomas, "The image of a derivation is contained in the radical", *Ann. of Math. (2)*, **128**(1988), 435–460.

[47] M. P. Thomas, "Primitive ideals and derivations on noncommutative Banach algebras", *Pacific J. Math.*, **159**(1993), 139–152.

کتاب‌نامه

[48] M. P. Thomas, “Algebra homomorphisms and the functional calculus”, *Pacific J. Math.*, **79**(1978), 251–269.

[49] Yu. V. Turovskiĭ and V. S. Shul’man, “Condition for massiveness of the range of the derivation on a Banach algebra and associated differential operators”, *Math. Notes*, **42**(1987), 305–314(in Russian).

[50] J. Vukman, “On derivations on prime rings and Banach algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **116**(1992), 877–884.

[51] J. Vukman, “A result concerning derivations on Banach algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **116**(1992), 971–975.

[52] J. Vukman, “Commuting and centralizing mappings on prime rings”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **109**(1990), 47–52.

[53] J. Vukman, “A result concerning derivations on noncommutative Banach algebras”, *Glas. Mat.* , **26**(1991), 83–88.

[54] B. Yood, “Continuous homomorphisms and derivations on Banach algebras”, *Contemp. Math.* , **32**(1991), 279–284.

[55] J. Zemánek, “Properties of the spectral radius in Banach algebras”, *Banach Center Publ.* , **8**(1982), 579–595.

پیوست الف

لیست اسامی

آلان	Allan
برِسار	Brešar
چنگ	Chang
کریدون	Creedon
کیوساک	Cusack
گلفاند	Gelfand
جیکوبسن	Jacobson
جانسون	Johnson
جان	Jun
کاپلانسکی	Kaplansky
کیم	Kim
کلینِکِ	Kleinecke
لِفلِر	Leffler
ماتیو	Mathieu
مازور	Mazur
میتاگ	Mittag
مورفی	Murphy
پوسنِر	Posner
پتاک	Pták
رونده	Runde
شیرُکوف	Shirokov
شولمن	Shul'man
سینکلر	Sinclair
سینگر	Singer
توماس	Thomas
توروفسکی	Turovskiĭ
وُوکمَن	Vukman
ورمر	Wermer
یود	Yood

پیوست ب

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی

اتحاد چندجمله ای	polynomial identity
استثنائی	exceptional
استقرا	induction
اسکالر	scalar
اشتقاق	derivation
اشتقاق القا شده	induced derivation
اشتقاق ژوردان	Jordan derivation
الحاق	adjunction
ایدآل	ideal
ایدآل اول	prime ideal
ایدآل اولیه	primitive ideal
ایدآل جداساز	separating ideal
ایدآل سره	proper ideal
بسط دوجمله ای	binomial expansion
بینهایت کوچک طیفی	spectrally infinitesimal
بی تاب	torsion free
پدید آمدهٔ خطی	linear span
پیمانه	modulo
پیوستگی خودکار	automatic continuity
پیوسته	continuous
پوچ- رادیکال	nilradical
پوچساز چپ	left annihilator
تاب	torsion
تابع بیکران	unbounded function
تابع یک به یک	injective function
تابعک	functional
تابعک خطی	linear functional
تابعک ضربی	multiplicative functional
تبدیل گلفاند	Gelfand transform

restriction	تحدید
reducibility	تحویلپذیری
irreducible	تحویلناپذیر
image	تصویر
generalization	تعمیم
commutator	تعویضگر
divisible	تقسیمپذیر
extension	توسیع
primitive algebra	جبر اولیه
modular annihilator algebra	جبر پوچساز مدولی
division algebra	جبر تقسیمی
disk algebra	جبر قرصی
normed algebra	جبر نرمدار
quotient	خارج قسمت
idempotent	خودتوان
automorphism	خودریختی
inner automorphism	خودریختی درونی
system	دستگاه
symmetric bilinear	دوخطی متقارن
radical	رادیکال
Jacobson radical	رادیکال جیکوبسن
submodule	زیر مدول
(formal) power series	سریهای توانی(صوری)
essential supremum	سوپریمم اساسی
quasi-nilpotent	شبه پوچتوان
spectral radius	شعاع طیفی
spectrally isometry	طولپای طیفی
isometry	طولپایی
spectrum	طیف
linear operator	عملگر خطی
difference space	فضای تفاضلی
separating space	فضای جداساز
spectral mapping theoram	قضیهٔ نگاشت طیفی
closed graph theorem	قضیهٔ نمودار بسته
complete	کامل
closed descent	کاهش بسته
maximal	ماکسیمال
recalcitrant	متمرد
modular	مدولی
eigenvalue	مقدار ویژه
spectrally contraction	منقبض طیفی

مرجع .... reference
مرکز .... center
مرکزساز .... centralizer
مینیمال .... minimal
نرم .... norm
نرم جبری .... algebra norm
نرم سوپریمم .... supremum norm
نقطه ای .... poinwise
نمایش .... representation
نیمساده .... semisimple
نیمه اول .... semiprime
واحد .... unit
وارونپذیر- یکال .... invertible
همانی .... identity
همبعدی .... codimension
هم مجموعه .... coset
هم مجموعهٔ چپ .... left coset
همریختی .... homomorphism
همریختی متعارف .... canonical homomorphism
هسته .... kernel

پیوست پ

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

adjunction .... الحاق
algebra norm .... نرم جبری
automatic continuity .... پیوستگی خودکار
automorphism .... خودریختی
binomial expansion .... بسط دوجمله ای
canonical homomorphism .... همریختی متعارف
center .... مرکز
centralizer .... مرکزساز
closed descent .... کاهش بسته
closed graph theorem .... قضیهٔ نمودار بسته
codimension .... همبعدی
commutator .... تعویضگر
complete .... کامل
continuous .... پیوسته
coset .... هم مجموعه
derivation .... اشتقاق
difference space .... فضای تفاضلی
disk algebra .... جبر قرصی
divisible .... تقسیمپذیر
division algebra .... جبر تقسیمی
eigenvalue .... مقدار ویژه
essential supremum .... سوپریمم اساسی
exceptional .... استثنائی
extension .... توسیع
(formal) power series .... سریهای توانی(صوری)
functional .... تابعک
Gelfand transform .... تبدیل گلفاند
generalization .... تعمیم
homomorphism .... همریختی
ideal .... ایدآل

idempotent .... خودتوان
identity .... همانی
image .... تصویر
induced derivation .... اشتقاق القا شده
induction .... استقرا
injective function .... تابع یک به یک
inner automorphism .... خودریختی درونی
irreducible .... تحویلناپذیر
isometry .... طولپایی
invertible .... وارونپذیر- یکال
Jacobson radical .... رادیکال جیکوبسن
Jordan derivation .... اشتقاق ژوردان
kernel .... هسته
left annihilator .... پوچساز چپ
left coset .... هم مجموعهٔ چپ
linear functional .... تابعک خطی
linear operator .... عملگر خطی
linear span .... پدید آمدهٔ خطی
maximal .... ماکسیمال
minimal .... مینیمال
modular .... مدولی
modular annihilator algebra .... جبر پوچساز مدولی
modulo .... پیمانه
multiplicative functional .... تابعک ضربی
nilradical .... پوچ- رادیکال
norm .... نرم
normed algebra .... جبر نرمدار
polynomial identity .... اتحاد چندجمله ای
poinwise .... نقطه ای
prime ideal .... ایدآل اول
primitive algebra .... جبر اولیه
-ideal .... ایدآل اولیه
proper ideal .... ایدآل سره
quasi-nilpotent .... شبه پوچتوان
quotient .... خارج قسمت
radical .... رادیکال
recalcitrant .... متمرد
reducibility .... تحویلپذیری
reference .... مرجع
representation .... نمایش
restriction .... تحدید

scalar .... اسکالر
semiprime .... نیمه اول
semisimple .... نیمساده
separating ideal .... ایدآل جداساز
separating space .... فضای جداساز
spectral mapping theoram .... قضیهٔ نگاشت طیفی
spectral radius .... شعاع طیفی
spectrally contraction .... منقبض طیفی
spectrally isometry .... طولپای طیفی
spectrally infinitesimal .... بینهایت کوچک طیفی
spectrum .... طیف
submodule .... زیر مدول
supremum norm .... نرم سوپریمم
symmetric bilinear .... دوخطی متقارن
system .... دستگاه
torsion .... تاب
torsion free .... بی تاب
unbounded function .... تابع بیکران
unit .... واحد

ABSTRACT

THE SINGER-WERMER CONJECTURE

BY

MOHAMMAD FARSHI

A derivation on a Banach algebra A is a linear operator D on A that satisfies $D(ab) = aD(b) + D(a)b \quad (a, b \in A)$.

The interest in range inclusion results for derivations on Banach algebras goes back to I. M. Singer's and J. Wermer's paper from 1955, in which they proved that every bounded(continuous) derivation on a commutative Banach algebra maps into the (Jacobson)radical. In a footnote they conjectured that the boundedness requirement for the derivation was superflous. This became known as "The Singer-Wermer Conjecture". It took more than thirty years until this conjecture was finally proved by M. P. Thomas.

There are various meaningful generalizations of the Singer-Wermer theorem and the Singer-Wermer conjecture to the noncommutative setting. All these results require at some point the following theorem by A. M. Sinclair: Every bounded derivation on a Banach algebra leaves the primitive ideals invariant. For commutative Banach algebras, the classical Singer-Wermer theorem can easily be deduced from Sinclair's result, which justifies the name "noncommutative Singer-Wermer conjecture" for it. The big open question which has become known as "The noncommutative Singer-Wermer Conjecture", is if every, possibly unbounded, derivation on a Banach algebra leaves the primitive ideals invariant.

It comes as no surprise that range inclusion problems for derivations on Banach algebras are closely connected with automatic continuity problems.

Another way of extending the Singer-Wermer theorem to the noncommutative situation is to consider local phenomena: The classical Kleinecke-Shirokov theorem states that if A is a Banach algebra and $a, b \in A$ are such that $[a, [a, b]] = 0$, then $[a, b]$ is quasinilpotent.

The Singer-Wermer conjecture is open until now and related to some other open questions in functional analysis.

The present dissertation organized as follows.

In the first chapter we put together some preliminary materials. In the second chapter we state the Singer-Wermer theorem and Singer-Wermer conjecture and its proof. In the third chapter we state some generalizations of the Singer-Wermer theorem(and conjecture) to the noncommutative setting. Finally, in the forth chapter we state concluding results and relation between the Singer-Wermer conjecture and some other open problems in functional analysis.

IN THE NAME OF GOD

THE SINGER-WERMER CONJECTURE

BY

MOHAMMAD FARSHI

THESIS

SUBMITTED TO THE SCHOOL OF GRADUATE STUDIES IN

PARTIAL FULFILMENT OF THE REQUIREMENTS FOR

THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE(M. Sc.)

IN

MATHEMATICS

SHIRAZ UNIVERSITY

SHIRAZ, IRAN

EVALUATED AND APPROVED BY THE THESIS COMMITTEE

AS: **EXCELLENT**

.... M. TAGHAVI, Ph.D., ASSISTANT PROF. OF
MATHEMATICS(CHAIRMAN)

.... K. SEDDIGHI, Ph.D., PROF. OF MATHEMATICS

.... H. Z. ZAHEDANI, Ph.D., ASSISTANT PROF. OF
MATHEMATICS

.... B. KHANI ROBATI, Ph.D., ASSISTANT PROF. OF
MATHEMATICS

MARCH 1999