

بسم الله الرحمن الرحيم

مثلث بندی بهینه یک چند ضلعی محدب

چند ضلعی محدب به چند ضلعی گفته می شود که همه قطرهای آن درون چند ضلعی قرار می گیرد و یا اینکه هر ضلع دلخواهی را امتداد دهیم کل چند ضلعی در یک طرف آن قرار بگیرد. یک چند ضلعی محدب را با دنباله $P=\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ از راس های آن در خلاف

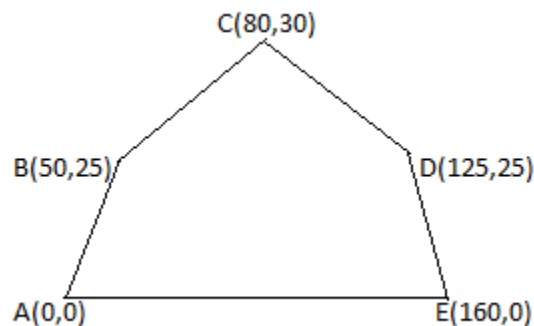
جهت عقربه های ساعت نشان می دهیم.

است که چند ضلعی را به چند غیر متقاطع منظور از مثلث بندی، مجموعه ای از قطر های مثلث تقسیم می کند. تابع وزن نیز روی طول قطر ها تعریف می شود.

مثلث بندی بهینه، به مثلث بندی گفته می شود که در آن مجموع وزن ها کمینه شود.

روش حریصانه:

در این روش ابتدا قطرهایی را انتخاب می کنیم که وزنشان (یعنی همان طول قطر) کمتر است. در مثال زیر نشان داده شده که این روش جواب درست نمی دهد.



$$BD=75$$

$$CE < 86$$

$$AC < 86$$

$$BE > 112$$

$$AD > 127$$

در این روش ابتدا کمترین طول یعنی BD انتخاب می شود سپس با توجه به شرط غیر متقاطع بودن قطر ها و طول کمتر، قطر BE انتخاب شود. در این صورت:

$$BD + BE = 75 + 112 = 187 \quad \leftarrow \text{وزن مثلث بندی}$$

در صورتی که اگر قطر های CE و AC انتخاب شوند، وزن مثلث بندی برابر 172 خواهد شد. بنابراین روش حریصانه جواب درست به ما نمی دهد.

روش پویا:

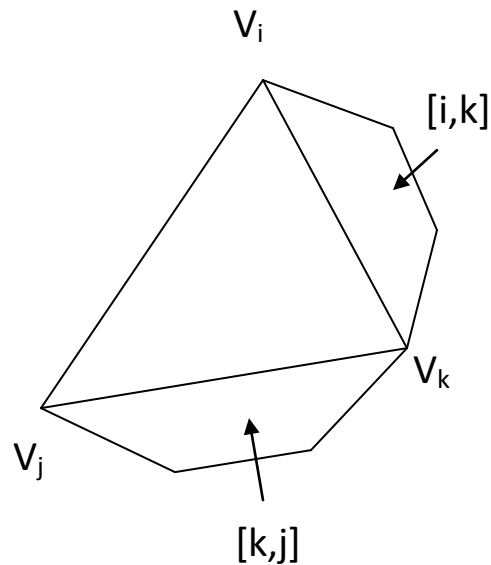
خاصیت زیر ساختار بهینه:

فرض کنید $K (0 < k < n-1)$ سومین راسی باشد که با رئوس V_i, V_j مثلث بسازد، آن گاه چند ضلعی به دو زیر چندضلعی (ممکن است یکی از آن ها تهی باشد) و این مثلث تقسیم می شود که هر کدام از این زیر چندضلعی ها نیز مثلث بندی بهینه شده اند. زیرا اگر یکی از آنها مثلث بندی بهینه نشده باشد در این صورت برای این زیر چندضلعی یک مثلث بندی بهینه وجود دارد که با توجه به ثابت بودن زیر چندضلعی دیگر و مثلث، بهینه بودن جواب اولیه نقض می شود. بنابراین این مسئله دارای خاصیت زیر ساختار بهینه می باشد.

رابطه بازگشتی:

اگر $T[i, j]$ هزینه مثلث بندی بهینه برای زیر چند ضلعی $\langle v_i, \dots, v_j \rangle$ باشد، آن گاه

$$T[i, j] = \begin{cases} 0 & j = i \text{ !! } j = i+1 \\ \text{Min} \{ T[i, k] + T[k, j] + d_{ik} + d_{kj} \} & i < j \end{cases}$$



در استفاده از رابطه بازگشتی، چون مقادیر ذخیره نمی شوند و هر بار محاسبه می شوند، زمان اجرا زیاد است. به همین دلیل از ماتریس T برای ذخیره مقادیر استفاده می کنیم.

ورودی: d_{ij} (قطر ها)

خروجی: مثلث بندی بهینه مثلث

Minimum-weight-Triangulation

for $i=1$ to n

$T[i,i]=0;$

$T[i,i+1]=0;$

for $l=1$ to $n-2$

for $i=1$ to $n-l-1$

$j=i+l+1;$

$T[i,j]=$

for $k=i+1$ to $j-1$

$$q = T[i,k] + T[k,j] + d_{ik} + d_{kj} ;$$

$$\text{if } q < T[i,j]$$

$$T[i,j] = q ;$$

$$S[i,j] = k ;$$

پیچیدگی این الگوریتم از $O(n^3)$ است.

مثال:

$$v_1 = (6, 15)$$

$$v_2 = (0, 10)$$

$$v_3 = (2, 4)$$

$$v_4 = (9, 0)$$

$$v_5 = (19, 7)$$

$$v_6 = (5, 15)$$

$$v_1 v_3 = 13.67$$

$$v_1 v_4 = 15.29$$

$$v_1 v_5 = 15.26$$

$$v_2 v_4 = 13.54$$

$$v_2 v_5 = 19.23$$

$$v_2 v_6 = 15.81$$

$$v_3 v_5 = 17.26$$

$$v_3 v_6 = 17.02$$

$$v_4 v_6 = 16.15$$

برای مثال:

$$L=3$$

$$i=1 \quad j=5$$

$$q = T[1,2] + T[2,5] + d_{12} + d_{25} = 13.54 + 19.23 = 32.77$$

$$q = T[1,3] + T[3,5] + d_{13} + d_{35} = 13.67 + 17.26 = 30.93$$

$$q = T[1,4] + T[4,5] + d_{14} + d_{45} = 13.54 + 15.29 = 28.83$$

$$i=2 \quad j=6$$

$$q = T[2,3] + T[3,6] + d_{23} + d_{36} = 16.51 + 17.02 = 33.53$$

$$q = T[2,4] + T[4,6] + d_{24} + d_{46} = 13.54 + 16.15 = 29.69$$

$$q = T[2,5] + T[5,6] + d_{25} + d_{56} = 13.54 + 19.23 = 32.77$$

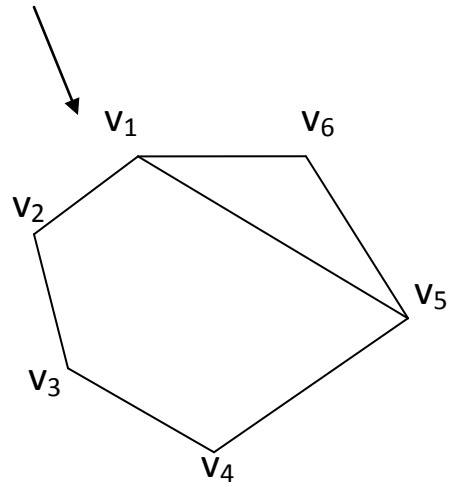
جدول T

0	0	0	13.57	28.83	44.09
	0	0	0	13.54	29.69
		0	0	0	16.51
			0	0	0
				0	0
					0

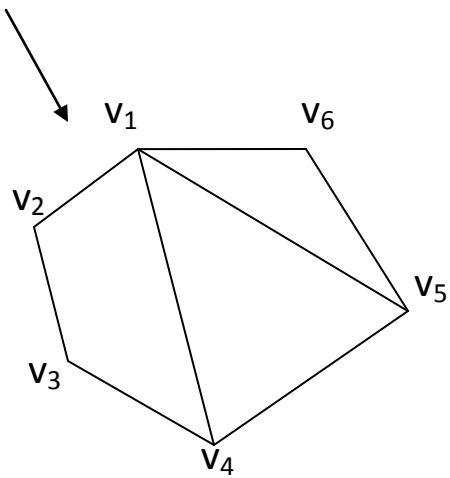
جدول S

0	0	2	2	4	5
	0	0	3	4	4
		0	0	4	4
			0	0	5
				0	0
					0

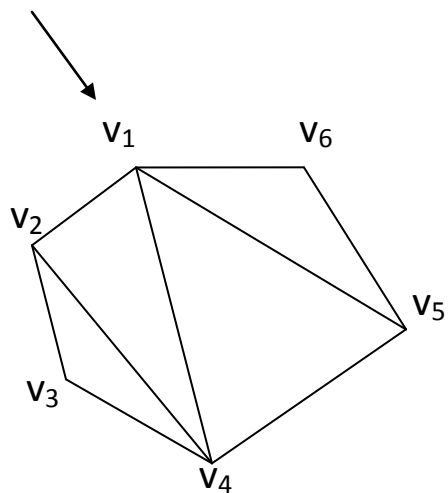
$$S[1,6]=5$$



$$S[1,5]=4$$



$$S[1,4]=2$$



بنابراین هزینه مثلث بندی برابر 44.09 است که برابر است با :

$$T[1,6]$$

$$T[1,6]=v_1v_5+v_1v_4+v_2v_4= 15.26+15.29+13.54=44.09$$